Oscar Hardey
1836.

CARDANUS SVEVUS.

SIVE

DE FUNCTIONIBUS COSSAE RESOLVENTIBUS TRACTATIO.

AUCTORE

M. GUILIELMO LUD. CHRISTMANN,

PASTORE THAILFINGAE

PROPE TUBINGAM.

STUTTGARDIAE,

IN COMMISSIS APUD J. B. MEZLERUM.

1815.

TUBINGAE,
LITERIS HOPFERI DE L'ORME.

PRAEFATIO.

Habes hic, amice Lector, opusculum parvæ molis, quod *Arti cossicae* 1813 a nobis editæ originem debet. Artem cossicam hanc autem necesse est ut ad *Manum* habeas, quoniam eam (tanquam partem Cardani Suevi priorem) continuo citamus. — Quod si forsan *recensere* nostra velis, valde rogamus, ne Artem cossæ *sine* Cardano recenseas; nam id quasi impossibile factu est. Tractationem *praesentem* autem legens, absque dubio perspicies, quod ab initio mihi ipsi nondum constiterit, quo res tandem perductura esset. Ne vero rem totam persequeres, varia fuere, quæ dehortabantur, inprimis studium brevitatis; et ipse scis, Lector benigne, quod rei cuique Suum tempus est. — Vale.

Dabam Tubingae, d. 3. Septembr. 1814.

Errata.

pag. 1 lin. 3 lege: incunabula. Hypotheseos —
— 7 lin. 4 ab infra, pro 63 lege: 6^3.
§. 13. lin. 5 pro *ratis* lege: *ratio.*
ibid. sub finem lege: $\left(\frac{xx}{2} - \frac{a}{4}\right)$.
pag. 16 lin. 4 pro *k* lege *K.*
— 24 lin. 1 pro *nro.* 1. lege: *nro.* 2.
ibid. lin. 5 pro §. lege §. 10.

§. 1.

Dissertatio haec pro surdesolidae aequationis Resolubilitate militat. — Res est et praeclara et nova, et sunt novae quasi scientiae incunabula Hypotheseos $x=\sqrt[m]{A}+\ldots$ ad casum $m=5$ adornatae indolem priori scripto, quod notum supponitur, pertractavimus, nec repetitione opus est, praesertim cum in secundo hoc scripto et Eulerum et omnem hypothesin Deseram. „Ceterum quoad istam Euleri hypothesin $x=\sqrt[m]{A}+\ldots$ nos primi et pro quovis gradu evicimus, quod illa mediante *Generalis* aequatio:

$$a+bx+cx^2+\ldots fx^{m-2}=x^m \qquad (M.)$$

Transformari omnino possit in *Generalem* hanc:

$$z^{m-1}=\alpha z^{m-2}-\beta z^{m-3}+\ldots\pm\pi \qquad (N.)$$

(vid. I. §. 32. et 39.), *ita*, ut aequatio (N) pro $m=2$, $m=3$, $m=4$ sponte et quasi uno actu in resolventem quadraticae, cubicae et biquadraticae abitura sit, (quod sane a nemine adhuc praestitum fuit,) pro $m=5$ autem et altioribus procedat quidem *Transformatio*, sed non *Resolutio*; nam casu hoc intermedii coefficientes β et γ per *alias incognitas* $L=\sqrt[5]{A^4}+\ldots$

$$M=\sqrt[5]{A^6}+\ldots$$

$$U=\sqrt[5]{A^9}+\ldots$$

exprimuntur, qui sunt natura sua Indeterminabiles, ut vidimus. *Eadem* igitur generalis transformatio, quae usque ad $m=4$ satisfaciens et Resolutoria est, ab $m=5$ inde non amplius *resolutoria* transformatio est, quoniam intermedios

1

β et γ (per naturam *Rei* vel saltim *Hypotheseos*) a novis incognitis indeterminabilibus pendentes sistit, potestque dici haec transformatae (N) quasi *Aberratio ob naturam numeri m.* Nam numerus $m = 5$ in culpa est, ut (saltim *hac* hypothesi) unciae β et γ per istas ignotas functiones exprimantur." — Distincte et paucis verbis et mente conscia et consulta hic exposuimus et veram Eulerianae hypotheseos indolem, et quid ipse circa illam praestiterim.

§. 2.

Ceterum ego hypothesin (ab Alio non a me inventam) *examinabam* tantum, eaque me meo studio a generali (M) ad generalem (N) sponte perduxit, casu $m = 5$ non mea sed *sua* sponte aberrans, et ultra $m = 4$ *sua* sponte impotentiam suam professa. Generalis autem haec ipsius:

x^m = et caet.

in ipsam: z^{m-1} = et caet.

transformatio, (quae posterior usque ad $m = 4$ *omnium* coefficientium, ab $m = 5$ inde saltim *extremorum* α *et* ε determinationem offert,) manifestam sic inclinationem cossae indigitat, *universaliter* et pro *omni* gradu ad hypothesin $x = \sqrt[m]{A} + ..$ se accommodandi; atque sic interim in dubio relinquitur, utrum hypothesis *cossae sursolidae*, an cossa sursolida *hypothesi* impar fuerit. Si *prius* est, sursolida *resolvetur*, sed non per *hanc* hypothesin; sin *posterius* est, hypothesis *justa* fuit, sed sursolida per eam irresoluta manet, quia *Irresolubilis* est.

§. 3.

Independens ab hac Euleriana hypothesi est nostrum duplex et quasi domesticum inventum, in priori dissertatione commemoratum, alterum prostat in (I. §. 41.), et est sane ex cossae theorematibus fundamentalibus. Alterum docet, cuivis aequationi algebraicae competentem aequationem *Dif-*

ferentialem invenire. Haec res inprimis praesenti scripto tanquam Basis inservit, ut mox patebit. — Propositum est autem in hac secunda tractatione omnino fines cossae ulterius promovere, et affirmare ausim, non modo novas res a nobis adinventas esse, sed quae et aliis inventis in posterum viam sternant; et sane multo minori labore, quam quem huic scripto impendi, tractationem eorum, quae dudum in cossicis nota fuerunt, conscripsissem. Neque haec per ambitionem aliquam profero, ut qui applausum non mihi sed Veritati moliar; sed ne hoc opusculum, cossae augmento destinatum, publica attentione intercidat, praecavendum est. — Jam enim tempus veniet, quo Tantaleo trium seculorum desiderio satisfiet, et quo

— quae difficilis fuit, est formosa Diana,
Spectari patiens, sed adhuc velata profanis.

§. 5.

Aequatio $x^m = ax^{m-2} + \ldots$ transformabitur in aliam $z^n = \alpha z^{n-1} - \ldots \pm \pi$, mediante functione quadam $F(x, z) = o$; (confer. I. §. 41.) Functio haec $F(x, z) = o$ autem, quae Relationem inter transformandam et transformatam indicat, in futurum aequatio *Relationalis* dicetur.

§. 6.

Priusquam progredior, aliquid praemoneo. — Si irrationale ex hujus: $x^2 - ax + y = o$ resolutione prodiens $\sqrt{\left(\frac{aa}{4} - y\right)}$ occurrat sub forma $= o$, supponendum est, factorem numericum aliquem intercidisse. Si verbi causa occurrat sub forma $aa - 4y = o$, manifestum est, factorem $\frac{1}{4}$ intercidisse. Quare si ex casu $= o$ irrationale absolutum restituere velis, necesse est factorem aliquem numericum m adhibere, qui defectum istum resarciat. Sic praecedente casu supponendum est irrationale absolutum esse $= m\sqrt{(aa - 4y)}$, ubi $m = \frac{1}{2}$. Idem intellige de quovis casu simili. — Etiam

hoc notandum, quod quoties de biquadraticae resolvente sermo est, semper conjugatarum *prima* (I. §. 17. nro. 2.) intelligatur; causa ex ipso scripto patebit.

§. 7.

Priori scripto (§. 5.) tradidimus, quomodo pro omni aequationum gradu inveniatur aequatio nobis dicta *differentialis Finalis*, cujus forma ibidem sub calcem §. 13. exhibetur. Hanc finalem in posterum continuo sic scribemus:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}} \qquad P.)$$

In hac finali si pro dy valor suus (qui dicatur $dy = Q dx$ ut in priori libello,) ponatur, tum pro omni gradu obtinebis hanc:

$$\sqrt{\mathfrak{Y}} = Q\sqrt{X}, \qquad T.)$$

quam in casu cubico (I. §. 8.) quasi divinatione quadam *Memorabilem* dixeram. Ex ipsa (T) jam vera functionis $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ indoles innotescit; nempe si $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ ope resolvendae exprimatur per x, tum transit in $Q\sqrt{X}$; hoc est, $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ per x expressum, semper divisibile est per Q. (Tentabis rem sine molestia in casibus hujus formae: $x^m = ax + y$.) Nunc ad rem. —

§. 8.

Aequationem nempe finalem P) intuens, reputabam primo, quod Universali modo et lege pro *quavis* resolvendae dimensione concinnetur (I. §. 5.) Eandem deinde finalem:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

(quae pro cubica in I. §. 5. et pro biquadratica ibidem §. 9. exhibita est,) concinnavi etiam pro *Surdesolida*; quae sic habet:

$$\frac{dy}{\sqrt{(5^5 y^4 - 2250 b^2 c y^2 + (108 b^4 + 1600 c^3) b y - c^2 (256 c^3 + 27 b^4))}}$$

$= \frac{dx}{\sqrt{X}}$. (Ob molem calculi valorem hunc $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ adaptavi ad

casum $a = 0$, ut ergo valeat pro resolvenda $x^5 = bx^2 + cx + y$; et eadem de causa valorem $\sqrt{X}$ non actualiter expressi, quoniam vi praecedentis §. 7. facile ex $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ obtinetur. Nimirum in denominatore nostro praecedente substituatur $y = x^5 - bx^2 - cx$, quod sic prodit, erit per $(5x^4 - 2bx - c)^2 = QQ$ divisibile, et peracta divisione hac habebis $\sqrt{X}$; ceterum qui rem experiri vult sine molestia, ei suadeo, ut insuper ponat $b = 0$. —

Atque sic igitur *confeceram* et ante *oculos* habebam aequationem differentialem finalem *cubicae* et *biquadraticae* et *surdesolidae*. Cum is labor continuari possit ad quamcunque altiorem dimensionem, animo proponebam tandem *generalem* casum:

$$x^m = ax^{m-2} + bx^{m-3} + \ldots y$$

et fingens ex *hac* et ejus differentiali:

$$mx^{m-1} = (m-2)\,ax^{m-3} + \ldots + Q$$

eliminatam esse ipsam x, intelligebam, et mihi per ideam repraesentabam formam *generalem* finalem praesto futuram;

$$\frac{dy}{\sqrt{(A + By + \ldots + Ny^{m-1})}} = \frac{dx}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \ldots + \mathfrak{N}x^{(m-1)(m-2)})}}$$

quae supra jam (I. §. 13.) commemorata est, et quae omnes inferiorum graduum finales:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

in se continere et involvere censenda est. Videbam igitur, valores hos $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ et $\sqrt{X}$ stirpis et Categoriae et indolis plane *Ejusdem* esse, et interiorem radicum naturam concernere, eosque in resolutione aequationum non modo ingentem sed et *Eandem* personam sustenturos esse.

§. 9.

Post praeliminariam hanc considerationem investigandum fuit, *quinam* igitur sit valorum $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ et $\sqrt{X}$ significatus; ergo ad cubicam $x^3 = ax + y$ redii, et competentes

casui huic valores $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ considerari coepi. Ex (I. §. 5.) patet, esse hic:

$$\sqrt{Y} = \sqrt{(27yy - 4a^3)}.$$

Jam ex cubicae resolvente $zz = yz - \frac{a^3}{27}$ irrationale sequitur $\sqrt{\left(\frac{yy}{4} - \frac{a^3}{27}\right)}$, quod scribi potest $m\sqrt{(27yy - 4a^3)}$, ubi $m = \frac{1}{6\sqrt{3}}$. Sic ergo nostrum $\sqrt{Y}$ designat „Irrationalem terminum in cubicae *Resolvente* latentem! —" Porro jam loco citato habemus

$$\sqrt{X} = \sqrt{(3xx - 4a)};$$

Est autem cubicae functio relationalis $F(x, z)$ nexum resolvendae et resolventis indicans haec;

$$z^{\frac{2}{3}} = xz^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}; \qquad \text{(I. §. 3.)}$$

quae resoluta offert irrationalem terminum $\sqrt{\left(\frac{xx}{4} - \frac{a}{3}\right)}$, qui scribi potest $n\sqrt{(3xx - 4a)}$, ubi $n = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Ergo $\sqrt{X}$ designat „irrationalem terminum in cubicae *Relationali* latentem! —" Atque sic denominatorum aequationis

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

nexus cum functionibus cubicae resolventibus pulcherrime patet!

§. 10.

Transimus ad Biquadraticam; ad nostrum scopum sufficit, considerare casum $x^4 = bx + y$, ponendo brevitatis causa $a = 0$. Secundum I. §. 9. aequatio differentialis finalis casu hoc ista est:

$$\frac{dy}{\sqrt{(256y^3 + 27b^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(16x^6 - 40bx^3 + 27bb)}}.$$

Ad examinandam horum $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ naturam recurrendum est ad (I. §. 17. nro. 2.) hoc est ad biquadraticae re-

solventium primam, tanquam simplicissimam, quae (ponendo ad vitandam inutilem irrationalitatem z pro $z^{\frac{1}{2}}$) talis est:

$$z^3 = \frac{a}{2} z^2 - \left(\frac{aa + 4y}{16}\right) z + \frac{bb}{64}.$$

quae ponendo $a = 0$ in hanc abit:

$$z^3 = - \frac{y}{4} z + \frac{bb}{64}. \qquad (Q.)$$

Cubica resolvens haec deprimatur jam ad competentem resolventem suam *quadraticam*. Aequatio $T^3 = mT + n$ habet resolventem $w^2 = nw - \frac{m^3}{27}$, ergo comparando resolvens quadratica vel ultima ipsius (Q) haec est:

$$w^2 = \frac{bb}{64} w + \frac{y^3}{27 \cdot 64}. \qquad (T.)$$

quae resoluta terminum irrationalem exhibet:

$$\sqrt{\left(\frac{b^4}{4 \cdot 64} + \frac{y^3}{27}\right)} = r\sqrt{(256 y^3 + 27 b^4)},$$

ubi $r = \frac{1}{48\sqrt{3}}$. Videmus ergo hic praecise Eum valorem $\sqrt{Y}$, qui sub initium paragraphi in aequatione differentiali finali cernitur! — Superest, ut examinemus naturam functionis $\sqrt{X}$; aequatio relationalis (I. §. 17. nro. 1.):

$$z^{\frac{3}{2}} = x z^{\frac{2}{2}} - p z^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{8}$$

ob $p = \frac{xx - R}{2}$ et $R = \frac{a}{2} = 0$ in hanc abit:

$$z^{\frac{3}{2}} = x z^{\frac{2}{2}} - \frac{xx}{2} z^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{8}.$$

Ex hoc eliminetur membrum secundum; aequationis, quae sic obtinetur, quaeratur quadratica resolvens, ut modo supra in simili casu factum est, eritque ea resolvens praecise haec:

$$u^2 = \left(\frac{b}{8} - \frac{5x^3}{54}\right) u + \frac{x^6}{27 \cdot 63},$$

quae resoluta offert, omisso factore numerico, irrationalem terminum:

$$\sqrt{(16 x^6 - 40 b x^3 + 27 bb)},$$

qui praecise *respondet valori* $\sqrt{X}$ sub initium paragraphi! Si quis jam experimentum instituere velit cum generali forma $x^4 = ax^2 + bx + y$, is eundem effectum cernet, majori tamen calculi molestia.

§. 11.

Atque sic ergo patet, quid in finali nostra:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

isti $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ et $\sqrt{X}$ designent, et quomodo cum intima radicum aequationis resolvendae compage cohaereant. Designant nempe ultimam functionem irrationalem, a qua aequatio resolvenda tandem dependet; et quidem praecise designat $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ terminum irrationalem ultimum *Resolventis*, et $\sqrt{X}$ designat ultimum terminum irrationalem aequationis *Relationalis.* Quam prorsus autem *Ejusdem* naturae pro *omni* gradu finalis nostra

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

sit, quamvis id ex §. 8. manifestum sit, pro majestate tamen rei etiam *actu* probandum est. Exhibeamus nempe Generalem finalem §. 8. commemoratam, (prolixitatis autem vitandae causa ad casum $x^m = ax + y$, qui nostro scopo sufficit, restrictam), et contemplemur valorem casui huic respondentem $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Operando secundum I. §. 5. pro cubica $x^3 = ax + y$ habemus:

$$1. \quad \frac{dy}{\sqrt{(3^3 y^2 - 2^2 a^3)}}.$$

Pro $x^4 = bx + y$ habemus porro:

$$2. \quad \frac{dy}{\sqrt{(4^4 y^3 + 3^3 b^4)}}.$$

Pro $x^5 = cx + y$ obtinemus porro:

$$3. \quad \frac{dy}{\sqrt{(5^5 y^4 - 4^4 c^5)}}.$$

Pro $x^6 = dx + y$ denique obtinetur:

$$4.\quad \frac{dy}{\sqrt{(6^6 y^5 + 5^5 d^6)}}.$$

Ex hac inductione vel ex ipso operationis processu derivatur pro $x^m = ax + y$ differentiale finale hoc:

$$\frac{dy}{\sqrt{(m^m y^{m-1} \pm (m-1)^{m-1} a^m)}}. \quad (L.)$$

ubi + valet pro *m pari*, et — pro *m impari*. — Cum igitur etiam pro sursolida et quavis altiori finalis talis:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

(quae apprime pro vera aequationum algebraicarum Definitione et quasi Charactere differentiali habenda est,) existat, mira hinc *vel ex hoc solo Interim argumento* exspectatio et spes altiores gradus resolvendi accenditur. Cum enim, beneficio aequationis nostrae finalis, verbi causa pro sursolida valor $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ aeque in potestate sit ac pro cubica et biquadratica, Egregio quodam jure nostro supponimus, etiam pro sursolida existere resolventem, in qua experimentum et reductio paragraphorum 9 et 10 actualiter institui possit, hoc est, existere resolventem $z^4 =$ et caet. quae ad cubicam $u^3 =$ et caet. et inde ad quadraticam $w^2 = \lambda w - \varphi$ reducta, in postrema hac irrationalem terminum $\sqrt{Y}$ adspiciendum sistat. Quin adeo Provisoria interim ovatione exultandum est, „*Salvam* rem esse, *Existere* et in *Potestate* esse terminum irrationalem finalem $\sqrt{Y}$, ergo et exstituram *Resolventem*, cui subinde porro depressae et ad quadraticam reductae irrationale illud $\sqrt{Y}$ actualiter *competat*." Sic igitur finalis aequatio

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

ob decisivam functionum $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ indolem tanquam Hypomochlium rei Cossicae existit, et est quasi Sacra Ancora, quam post seculorum trium naufragia forte fortuna nunc apprehendimus. —

Quod ad aequationem *L*) attinet, notandum est, quod etiam quadratica $xx = ax + y$, secundum (I. §. 5.) tractata, isti legi subest, uti debet; et pulchrum est videre, quomodo ejus irrationale $\sqrt{(4y + aa)}$ non sit nisi ultimus vel infimus casus irrationalium finalium, a quibus hujus:

$$x^m = ax + y$$

radix tandem pendet. Utinam Eulerus viveret!

§. 12.

Cum termini $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ habeant significationem §. 9-11. explicatam, haec ipsa causa est, cur *Eadem* semper finalis

$$\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

obtineatur, quicunque tandem aequationis

$$x^m = ax^{m-2} + bx^{m-3} + \ldots f$$

coefficiens variabilis esse $= u$ ponatur. Verbi causa $x^3 = ax + b$ ab irrationali $\sqrt{(27bb - 4a^3)}$ pendet, sive a sive b variabilis ponatur; Ergo aequatio finalis differentialis irrationalem istum terminum spectandum sistet *sive pro*

$$x^3 = ax + y$$

seu pro $x^3 = ux + b$

calculum instituas. Actualiter autem casus posterior offert finalem:

$$\frac{du}{\sqrt{(27bb - 4u^3)}} = \frac{dx}{\sqrt{(4bx - x^4)}}. \qquad \text{(I. §. 6.)}$$

quae finalis manifesto Eosdem irrationales terminos continet, quos in finali:

$$\frac{dy}{\sqrt{(27yy - 4a^3)}} = \frac{dx}{\sqrt{(3xx - 4a)}}$$

ad $x^3 = ax + y$ pertinente deprehendimus. Denominator sinister enim aperte coincidit; sed etiam *dexter* denominator in utroque finali conspirat, si ex $\sqrt{(4bx - x^4)}$ ope resolvendae $x^3 = ux + b$ ipsam b literam *exterminemus*, quemadmodum (I. §. 8.) notavimus. Atque sic aequatio ad formam $x^3 = ux + b$ accommodata finalis:

$$\frac{du}{\sqrt{(27bb-4u^3)}} = \frac{dx}{x\sqrt{(3xx-4u)}}$$

terminos irrationales Eosdem et Ejusdem virtutis offert, quos proposita $x^3 = ax + y$ obtulit; ut par fuit. Similiter pro $x^4 = bx + y$ supra §. 10, habuimus aequationem finalem:

$$\frac{dy}{\sqrt{(256y^3+27b^4)}} = \frac{dx}{x\sqrt{(16x^6-40bx^3+27bb)}}. \quad K.)$$

Pro $x^4 = ux + c$ autem secundum (I. §. 6.) operando obtinemus finalem:

$$\frac{du}{\sqrt{(256c^3+27u^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(3x^8-14cx^4+27c^2)}},$$

vel in dextro denominatore substituendo $c = x^4 - ux$ habetur:

$$\frac{du}{\sqrt{(256c^3+27u^4)}} = \frac{dx}{x\sqrt{(16x^6-40ux^3+27uu)}}$$

Hujus denominatores irrationales ipsis in *K.*) conspicuis legitime consentiunt. Experieris idem pro $x^5 = ux + d$ et quovis altiori gradu; et in Completis etiam aequationibus, majori calculo.

§. 13.

Proprietati functionum $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ et $\sqrt{X}$ supra memoratae, et vero earum significatui universalis jam lux affundenda est ex alio principio. Valores irrationales $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ et $\sqrt{X}$ nempe „cum possibilitate radicum cohaerent; et vera hujus rei investigandae ratis in examinandis ambobus valoribus istis vertitur." — Vel aliis verbis; „si in resolvenda ponatur $y =$ *max.*, et ope differentialis eliminetur x, tum obtinetur *praecise et pro quovis gradu nostrum* $\mathfrak{Y}$, sed sub forma $\mathfrak{Y} = 0$, quae Maximi casum designat." Hinc loco methodi (I. §. 5.) propositae invenitur $\mathfrak{Y}$ etiam *Eo*, quem *Nunc* exponimus, modo. Quod sic induat formam $= 0$, hoc nil impedit. Invento sic $\sqrt{\mathfrak{Y}}$, invenietur etiam $\sqrt{X}$, per methodum supra §. 7. designatam. Sic verbi causa pro $x^m = ax + y$ valor $\sqrt{\mathfrak{Y}}$, (qui supra §. 11. Inductione eruebatur,) nunc a Priori sine molestia obtinetur; et intelligitur simul, qualis pro Universali:

$$x^m = ax^{m-2} + bx^{m-3} + \ldots y$$

valoris $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ natura sit; quod enim ex universali hac et ex ejus differentiali $= 0$ posito, eliminando x obtinetur, est $= \mathfrak{Y}$. Sic pro $x^3 = ax + y$ obtinetur $\mathfrak{Y}$, ponendo $3xx - a = 0$, et valorem $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$ in cubicam substituendo. Similiter omnes pro omni gradu obtinebis $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ nostros, differentiando propositam aequationem pro $dy = 0$, et x ex ambabus eliminando. — Atque haec utique ad intelligendam denominatorum hujus:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

naturam sufficiunt. — Notandum est autem, obtineri $\mathfrak{Y} = 0$ in casu praecedenti cubico non modo per differentiale $3xx - a = 0$, hoc est per $Q = 0$, sed et per Alium insuper valorem. Nam (I. §. 5.) in aequatione $Q^2(Q - 3a) = \mathfrak{Y}$ fit $\mathfrak{Y} = 0$ non modo pro $Q = 0$, hoc est pro $3xx - a = 0$, sed et pro $Q - 3a = 0$, hoc est pro $3xx - 4a = 0$. Ergo *hic* etiam ipsius x valor in cubicam introducitur Eodem effectu. Est autem hic valor $Q - 3a = 0$ praecise id, quod X dicimus; nam est Ea aequationis (I. §. 5.) pars, quam ibi per x exprimendam diximus, et hac expressione facta repraesentat nostrum valorem X. Idem intellige jam de quovis altiori gradu, et facile experieris rem pro casu $x^m = ax + y$. Quare generaliter pro $y = max$ fit *simul* et $\mathfrak{Y} = 0$ et $X = 0$, hoc est, in finali nostra:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

denominator dexter cum sinistro *simul* evanescit; hoc idem ex aequationis

$$\sqrt{\mathfrak{Y}} = Q\sqrt{X}$$

intuitu discimus, nempe evanescere $\mathfrak{Y}$ pro $Q = 0$, et pro $X = 0$, idque fieri vidimus casu ipsius y Maximi.

Ex his duae res sponte consequuntur; 1. Cum $\sqrt{\mathfrak{Y}}$ sit irrationale illud, a quo radix x finaliter tandem pendet,

hinc aequatio etiam *Resolvens*, ad casum $y = max$ tractata, (eliminando nempe z ex resolvente et ejus differentiali,) eundem praecise oblatura sit valorem $\mathfrak{Y} = 0$. — 2. Cum in proportione:

$$dy : dx = \sqrt{\mathfrak{Y}} : \sqrt{X}$$

casu y maximi cum tertio membro *simul* etiam evanescat *quartum*, ut vidimus, ergo existente tunc $dy = 0$ simul etiam *secundum* membrum $dx = 0$ fieri censendum est. Hinc fit, ut *Relationalis* aequatio, nempe $F(x, z) = 0$, ad casum $dx = 0$ accommodata offerat *hanc* $X = 0$, quemadmodum resolvenda et resolvens, ad casum $dy = 0$ tractatae, offerebant *hanc* $\mathfrak{Y} = 0$. Sic verbi causa cubicae aequatio relationalis

$$z^{\frac{2}{3}} = x z^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3} \qquad \text{(I. §. 3.)}$$

vel brevius: $t^2 = xt - \frac{a}{3}$

pro $dx = 0$ differentiata, eliminando t offert $X = 0$ hoc est $3x^2 - 4a = 0$, legitime. Eundem effectum disces casu biquadraticae, cujus relationalis ex (I. §. 17. nro. 1.) talis est:

$$t^3 = xt^2 - \left(\frac{xx}{2} = \frac{a}{4}\right) t + \frac{b}{8}.$$

§. 14.

Quamquam hypothesin $x = \sqrt[5]{A} + \ldots$ aequationi sursolidae resolvendae impotem esse ex priori scripto abunde scirem, tamen mire curiosus fui discendi, qualis pro relationali, casui $x = \sqrt[5]{A} + \ldots$ competente

$$t^4 = xt^3 - pt^2 + qt - \delta^{\frac{1}{5}} \qquad \text{(I. §. 27. nro. 1.)}$$

terminus irrationalis $X = 0$ proditurus esset. Examinavi brevitatis causa casum $a = 0$, $b = 0$, hoc est $x^5 = cx + y$. Hinc per (I. §. 19.) relationalis praecedens hanc formam induit:

$$t^4 = xt^3 - \frac{x^2}{2} t^2 + \frac{x^3 t}{6} - \frac{c}{30}. \qquad K.)$$

Eliminato hic membro secundo obtinetur forma:

$$V^4 = \mathfrak{A}V^2 + \mathfrak{B}V + \mathfrak{C}.$$

Hujus resolvens (per I. §. 17. nro. 2.) haec est:

$$W^3 = \frac{\mathfrak{A}}{2} W^2 - \left(\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A} + 4\mathfrak{C}}{16}\right) W + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{64}.$$

Ex hac eliminando secundum terminum obtinemus formam:

$T^3 = \mathfrak{M}T + \mathfrak{N}$, vel jam actualiter:

$$T^3 = \left(\frac{c}{120} - \frac{x^4}{4.48}\right) T + \frac{x^6}{3.48^2} - \frac{cx^2}{120.48};$$

quam scimus ab irrationali finali (in resolvente ejus latente) pendere:

$\sqrt{(27\mathfrak{N}^2 - 4\mathfrak{M}^3)}$; hoc est ab:

$$\sqrt{(125\,x^{12} - 450\,cx^8 + 570\,c^2x^4 - 256\,c^3)}. \qquad L.)$$

(Praecise Idem valor prodiisset, si aequationem K vi praecedentis paragraphi pro $dx = 0$ differentiassemus, et t eliminavissemus; prodiisset autem tunc sub forma $= 0$.) — Atque *Tale* est igitur $\sqrt{X}$ Eulerianum, nempe pro sursolida ad hypothesin $x = \sqrt[5]{A} + ..$ accommodata! —

Jam vero *Verus* valor $\sqrt{X}$, qualis nempe in aequatione finali:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

(pro casu $x^5 = cx + y$ secundum (I. §. 5.) quaesita) deprehenditur, *Talis* est:

$$\sqrt{(125\,x^{12} - 450\,cx^8 + 565\,c^2x^4 - 256\,c^3)},$$

a quo valor superior utique abludit. Atque sic igitur Euleriana hypothesis $x = \sqrt[m]{A} + ...$ sive *Relationalis* ad hanc hypothesin spectans, a casu $m = 5$ ne *Criterio* quidem legitimo $\sqrt{X}$ praedita est! — Ceterum si Eulerianus valor $\sqrt{X}$, (qui est L,) a genuino *prorsus* abhorruisset, minime miratus essem, et immo sic fore Exspectaveram. Quare

non parum tantus consensus me movit; manifestum fit enim, (cum tantillo discrimine distent,) relationalem Eulerianam *non* quidem justam esse, sed nec tamen *prorsus* ab justa relationali abhorrere, ita ut aequationi *k* nescio quid videatur deesse, quo minus relationalis *Vera* sit. — Simul elucet autem, quomodo $\sqrt{Y}$ nostrum, (quod per Q divisum in $\sqrt{X}$ abit,) pro quacunque alia hypothesi lapis Lydii instar futurum sit.

§. 15.

Mutandi discursus causa nunc aliam observationem addam, cujus forsan erit usus in sequentibus, et quae insuper naturam transformationum algebraicarum universaliter concernit. Assumto

1. $x^3 = ax + y$

2. $F(x, z) = 0$

3. $zz = \alpha z - \beta$,

vidimus intermediam relationalem $F(x, z)$, quae ad nro. 3. sive ad resolventem ducit, esse hanc:

$$x = z^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{3z^{\frac{1}{3}}}. \quad \text{(I. §. 3.)}. \quad (O.)$$

Eaque sumto utrinque cubo ad resolventem legitime perducit, ut loco citato monuimus. Nec aliter fieri potuit; nam per artificium (I. pag. 6.) positio Euleriana $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ sponte in relationalem O) abit, ideoque altera alteri aequivalens est. Positionum autem

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$x = z^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{3z^{\frac{1}{3}}}$$

manifesto ea tantum differentia est, quod per priorem radix x expresse per *ambas* aequationis resolventis radices A et B exprimatur, in posteriori autem exprimatur indifferenter vel promiscue per solam z. Jam quemadmodum positio prior seu Euleriana a nobis revocata est ad posteriorem, sic vice

versa quaevis functio $F(x, z) = 0$, quae ad aliquam $x^m =$ et caet. in aliam $z^n =$ et caet. transformandam adhibita fuerit, revocari poterit ad relationalem hujus formae:

$$(x, A, B \ldots) = 0.$$

Verbi causa si pro cubica $x^3 = ax + y$ adhibueris relationalem O), quae est:

$$z^{\frac{2}{3}} = xz^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}$$

tum subinde pro z substituendo radices A et B, has ambas aequationes obtines:

$$A^{\frac{2}{3}} = xA^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}$$

$$B^{\frac{2}{3}} = xB^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3},$$

ex quibus eliminando $\frac{a}{3}$ conficitur forma $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

Pariter si inter biquadraticam:

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

et ejus resolventem:

$$z^3 = \frac{a}{2} z^2 - \left(\frac{aa + 4c}{16}\right) z + \frac{bb}{64}$$

scias hanc relationem intercedere:

$$z^{\frac{3}{2}} = xz^{\frac{2}{2}} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a}{4}\right) z^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{8} \quad \text{(I. §. 17. nro. 1.)}.$$

tum pro relatione inter x et A, B, C obtinenda considerabis has tres aequationes:

$$A^{\frac{3}{2}} = xA - \left(\frac{xx}{2} - \frac{a}{4}\right) A^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{8}$$

$$B^{\frac{3}{2}} = xB - \left(\frac{xx}{2} - \frac{a}{4}\right) B^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{8}$$

$$C^{\frac{3}{2}} = xC - \left(\frac{xx}{2} - \frac{a}{4}\right) C^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{8};$$

ex quibus eliminando a et b disces, quaesitam relationem esse hanc:

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}.$$

Mani-

Manifestum est autem, literis A, B,... in relationalem $F(x, z) = 0$ loco ipsius z impositis, tot aequationes obtineri, quot radices in transformata insunt; et fluit ex hoc paragrapho corollarium quoddam considerabilis momenti quoad naturam relationis $F(x, z) = 0$ inter datam et inter transformatam existentis, cui rei autem hac vice prorsus non immoror. Nam hoc solum hic monere voluimus, (quia res Essentiale quid habet,) in transformationibus algebraicis locum habere quandam operandi Duplicitatem, vel duplicem relationis intercedentis formam, quarum altera ex altera sponte consequitur, et altera pro altera adhiberi eique subrogari potest eodem effectu. Quemadmodum per

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \text{ et}$$

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$$

ad cubicae et biquadraticae resolventem perducimur, sic pariter per

$$z^{\frac{2}{3}} = xz^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}$$

$$z^{\frac{3}{4}} = xz^{\frac{2}{4}} - \left(\frac{xx}{2} - \frac{a}{4}\right) z^{\frac{1}{4}} + \frac{b}{8}$$

ad Easdem (respective) resolventes delabimur, et vice versa. Idem intellige de quovis altiori gradu. Si verbi causa aequatio:

$$x^5 = ax^3 + bx^2 \pm cx + d$$

reduci *potest* ad resolventem:

$$z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$$

necesse est existere relationalem quandam $F(x, z) = 0$, quae nexum inter datam et resolventem exhibet. Jam si quis talem functionem $F(x, z) = 0$, *Invenerit*, qua reductio sursolidae ad biquadraticam absolvatur, tum ex his quatuor:

$$F(x, A) = 0$$

$$F(x, B) = 0$$

$$F(x, C) = 0$$

$$F(x, D) = 0,$$

illa Altera et Aequivalens expressio, per x, A, B, C, D

exhibita innotescet; quae altera igitur, (qualiscunque tandem futura sit,) Existet utique vel potius Coexistet priori.

§. 16.

Aequatio relationalis $F(x, z) = 0$ ad resolutionem actualiter perducens, repraesentabit utique aequationem tandem aliquam Algebraicam dimensionis cujusdam quoad z, ut (I. §. 40.) monuimus. Haec relationalis in casibus huc usque resolutis ita est comparata, ut cum resolvente *ipsa* sit quasi *Identica*. Sic verbi causa cubicae functio relationalis:

$$z^{\frac{2}{3}} = xz^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}$$

resolvendo offert: $z^{\frac{1}{3}} = \frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{xx}{4} - \frac{a}{3}\right)}$;

et sumendo cubo: $z = \frac{x^3 - ax}{2} + \left(xx - \frac{a}{3}\right)\sqrt{\left(\frac{xx}{4} - \frac{a}{3}\right)}$.

Factorem, qui est post radicale, sub radicale multiplica, quo facto aequatio tota per y exprimetur, id est sine x, fietque:

$$z = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{yy}{4} - \frac{a^3}{27}\right)},$$

unde sequitur $zz = yz - \frac{a^3}{27}$, nempe *Resolvens ipsa*. Sic ergo aequatio relationalis et resolvens quasi prorsus Identicae sunt, nec sunt nisi Ejusdem rei diversimoda repraesentatio. Sub forma:

$$z^{\frac{2}{3}} = xz^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}$$

Relationalis dicitur, sed in hanc reducta:

$$z^2 = (x^3 - ax)z - \frac{a^3}{27}$$ *Resolvens* est.

Similiter *Biquadraticae* functio relationalis (§. 15):

$$z^{\frac{3}{2}} = xz - \left(\frac{xx}{2} - \frac{a}{4}\right)z^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{8}$$

si sub forma: $\left(z + \frac{xx}{2} - \frac{a}{4}\right)z^{\frac{1}{2}} = xz + \frac{b}{8}$.

quadretur, tunc formam hanc induit:

$$z^3 = \frac{a}{2} z^2 - \left(\frac{7a}{16} + \frac{x^4 - ax^2 - bx}{4}\right) z + \frac{bb}{64},$$

quae, quia nunc x per y exprimibile est, jam *Resolvens* dicitur, cum antea *Relationalis* esset. Ergo *hic* etiam aequatio resolvens cum relationali quasi Identica est. (Hic ipse praecise nodus fuit in casu sursolido (I. §. 27. nro. 1.), quod nempe relationalis aequatio ibi exstans Eulero-nostra non ita ad resolventium conjugatarum aliquam *ita* reducebatur, ut coefficientes omnes per a, b, c, y, hoc est, *sine* x, exprimibiles fuissent; res enim in Extremis tantum coefficientibus processit, nec vero in Intermediis. Nempe si loco citatio valores P, Q, vel V, T, vel β, γ per meros aequationis resolvendae coefficientes exprimi potuissent, aequatio sursolida *resoluta* fuisset.) Re sic habente, omnino dici potest, sursolidae *Resolventem* non in potestate esse, quia *Relationalis* ejus non in potestate est. Si semel vera *relationalis* functio $F(x, z) = 0$ constaret, (nam Euleriana $x = \sqrt[5]{A} + \ldots$ et huic aequivalens I. §. 27. nro. 1. non vera est, et ne criterium $\sqrt{X}$ quidem habet, ut supra §. 14. vidimus,) tum sine dubio sursolidae resolutio nil amplius difficultatis haberet, quoniam calculus justo tenore suo incederet. Hoc *ipsum* Remorari solutionem fatendum est, quod nempe functio $F(x, z) = 0$ genuina *ignota* sit; quae hactenus in hunc finem usurpatae sunt functiones, *non* genuinae fuerunt, et simul ignoratur, quaenam *alia* et *efficax* functio $F(x, z) = 0$ illarum loco adhiberi vel *possit* vel *debeat*. Quaeritur non tam *Resolutio*, quam potius *Principium* resolvendi. — Quoad praedictam *Identitatem* relationalium et resolventium esset, unde excurrerem in generale theorema quoddam huc spectans, quod autem, cum nulla ejus expressa applicatio fit in sequentibus, brevitatis causa consulto praetermittimus.

§. 17.

Priusquam ad id, quod caput rei est, transimus, inprimis e re videtur, manifestare, quomodo cubicae et biquadraticae resolutio cum proprietate (I. §. 41.) cohaereat. Cubicae relationalem scimus esse hujus formae:

$$z^{\frac{2}{3}} = Az^{\frac{1}{3}} - B, \qquad (M.)$$

et resolventem hujus formae:

$$z^2 = \alpha z - \beta.$$

Ex ista (M) obtinetur sumendo cubo:

$$z^2 = (A^3 - 3AB)\,z - B^3. \qquad (N.)$$

Ergo est:

$$\alpha = A^3 - 3AB.$$

$$\beta = B^3.$$

Forma (M) *relationalis* est, sub forma (N) jam *resolvens* evadet.

Jam recordemur, quae supra §. 13. de natura functionis $\surd\mathcal{Y}$ diximus, quod ea obtineatur nempe sub forma $\mathcal{Y}=0$, si resolvenda differentiatur pro $y = max.$, et deinde x eliminatur. Sed resolvens aequatio *Eundem* terminum irrationalem $\surd\mathcal{Y}$ continet, hoc est aliis verbis, Resolvens pro $dy = 0$ differentiata eliminatoque deinde z, spectandam sistet eandem istam $\mathcal{Y} = 0$.

Sic ergo aequatio (N), quae est Resolvens futura, differentietur pro $dy = 0$, hoc est, pro sola z variabili, deinde eliminetur z, ut fiat:

1.) $A^6 - 6A^4B + 9A^2B^2 - 4B^3 = 0$, id est $\mathcal{Y} = 0$.

Similiter tractetur relationalis (M) pro $dx = 0$, id est, pro sola z variabili, ut fiat:

2.) $A^2 - 4B = 0$,

quo (secundum §. 13. sub finem) designatur $X = 0$.

Jam cum ipsa (1) designet $\mathcal{Y} = 0$, et generaliter sit:

$$\mathcal{Y} = QQX \qquad (§. 7.)$$

ergo (1) designat $Q^2X = 0$, ergo divisibilis est (1) per (2), id est per $X = 0$, et reliqua pars exprimet quadratum QQ.

„Experiundo hoc ita omnino se habere disces, ipsam nempe (1) esse *sic* conflatam:

$$3.)\ (A^2 - B)^2\ (A^2 - 4B) = 0;$$

quo igitur designatur $Q^2 X = 0$. Est autem casu cubico nostro:

$$Q = 3x^2 - a$$
$$X = 3x^2 - 4a,$$

ergo praecedens aequatio:

$$4.)\ (A^2 - B)\ \sqrt{(A^2 - 4B)} = 0$$

designat evidenter functionem

$$5.)\ (3x^2 - a)\ \sqrt{(3x^2 - 4a)} = 0$$

Memorabilem dictam (I. §. 8.), et ob casum Maximi sub forma $= 0$ apparentem.

(Si scribatur:

$$u^2 = Au - B$$
$$u = z^{\frac{1}{2}}$$
$$z^2 = \alpha z - \beta,$$

utique in oculos cadit, quod divisibilitas ipsius (1) per ipsam (2) sit manifestus casus vel exemplum proprietatis (I. §. 41.). Nobis hic sufficit, eam rem actu comprobasse, nec tamen ulterius in his occupari licet.)

§. 18.

Quos juvat autem, a §. 17. ad resolutionem Ipsam progredi, iis *indigito* saltim rei processum. — Aequationum (4) et (5) utraque, ut vidimus, designat $Q\sqrt{X} = 0$. Ergo comparando fiet:

$$A^2 - B = m\,(3x^2 - a) \qquad R.)$$
$$A^2 - 4B = n\,(3x^2 - 4a). \qquad S). \quad \text{conf. §. 6.}$$

(Valores nempe numerici m et n adhibendi sunt, quoniam aequationes (4) et (5) sub forma $= 0$ apparent.) Ex R) et S) quaeratur jam A et B; ex quibus ob $\alpha = (A^2 - 3B)\,A$, et $\beta = B^3$ determinabis etiam ipsos α et β. Quorum valorem sic inventum intuens sponte intelliges, ad α et β sine x ex-

primendos necesse esse ut fiat $m = n$. Sic ultro emergent valores:

$$A = x\sqrt{3m}$$
$$B = ma$$
$$\alpha = 3m\sqrt{3m}\sqrt{(x^6 - 2ax^4 + a^2x^2)} \text{ vel}$$
$$\alpha = 3my\sqrt{3m}$$
$$\beta = m^3a^3.$$

Inde conficitur relationalis:

$$z^{\frac{2}{3}} = xz^{\frac{1}{3}}\sqrt{3m} - ma$$

et resolvens: $z^2 = 3myz\sqrt{3m} - m^3a^3$,

ubi litera m arbitraria manet. Sed si in relationali pro $z^{\frac{1}{3}}$ ponas primo $M^{\frac{1}{3}}$, tum $N^{\frac{1}{3}}$, secundum §. 15. obtinetur:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3m}}\left(\sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N}\right).$$

Unde patet, commodissimam et naturalem determinationem esse $\sqrt{3m} = 1$, quod offert resolventem vulgarem.

§. 19.

Eandem jam Divisibilitatem (§. 17.) praesto esse videbis casu *biquadratico*. Scis casu hoc esse relationalem formam:

$$z^{\frac{3}{4}} = Az^{\frac{2}{4}} - Bz^{\frac{1}{4}} + C. \qquad (M.)$$

et resolventem: $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$.

Reducendo ipsam (M) habebimus:

$$z^3 = (AA - 2B)\,z^2 - (B^2 - 2AC)\,z + C^2 \qquad (N.)$$

hinc $\alpha = AA - 2B$, et cetera. Nunc differentia ipsam (M) et elimina z; quod sic obtinetur, exprimit functionem $X = 0$. Obtinetur autem:

$$27C^2 + (4A^3 - 18AB)\,C + 4B^3 - A^2B^2 = 0. \qquad (T.)$$

Similiter tracta nunc ipsam (N) quoque; aequatio sic prodiens:

$$27C^4 + \left.\begin{matrix} 4A^3 \\ -72AB \end{matrix}\right\} C^3 + \left.\begin{matrix} 62A^2B^2 \\ -8A^4B \\ +4B^3 \end{matrix}\right\} C^2 + \left.\begin{matrix} 4A^5B^2 \\ -16A^3B^3 \\ -8AB^4 \end{matrix}\right\} C + \begin{matrix} 4A^2B^5 \\ -A^4B^4 \end{matrix} = 0,$$

&c.

repraesentabit $Y=0$ vel $QQX=0$, et erit igitur per $X=0$ id est per ipsam T) divisibilis, parte reliqua quadratum QQ designante. Actualiter autem praecedens aequatio sic decomponitur:

$$(AB-C)^2(27C^2+(4A^3-18AB)C+4B^3-A^2B^2)=0;$$

quam aequationem si ad resolutionem jam *ipsam*, adhibere velis, habebis (ut in casu cubico §. 18. R et S) *duas* aequationes, ex quibus autem *tres* incognitas A, B et C determinare nondum poteris. „Ergo hic opus est *Subsidiaria* vel *tertia* aequatione, quam curiosus lector vel ipse deteget, vel ex nobis quaerenti indicabitur." — Res enim haec licet praecipuas elegantias habeat, et subsidiaria functio ista inprimis memorabilis sit, nullam tamen hic locum invenit.

§. 20.

Quod laboris restat, id jam unice aequationi surdesolidae tribuetur. Priusquam autem progredimur, nonnulla necessario praemittenda sunt. — Aequatio finalis nostra

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

manifesto *sic* adornata est, ut in terminis $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ nullae *fractiones numericae* occurrant. Verbi causa, pro $x^3=ax+y$ differentialem finalem terminum habuimus:

$$\frac{dy}{\sqrt{(27yy-4a^3)}},$$

cum in cubicae resolvente $zz=yz-\frac{a^3}{27}$ lateat irrationale *hujus* formae:

$$\sqrt{\left(\frac{yy}{4}-\frac{a^3}{27}\right)},$$

quod ergo per numerum $r=6\sqrt{3}$ multiplicatum, demum ad formam $\sqrt{(27yy-4a^3)}$ fractionibus liberam reducitur.

Similiter pro $x^4=bx+y$ aequatio differentialis finalis:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

spectandum dabat:

$$\sqrt{Y} = \sqrt{(256 y^3 + 27 b^4)} \qquad (\S.\ 11.),\ \text{nro. 1.}$$

sed ipsius $x^4 = bx + y$ resolvens $z^3 = -\frac{y}{4} z + \frac{bb}{64}$ ad quadraticam:

$$w^2 = \frac{bb}{64} w + \frac{y^3}{27 . 64}$$

reducta, ex quadraticae hujus resolutione offerebat §. terminum *hunc* irrationalem:

$$\sqrt{\left(\frac{y^3}{27} + \frac{b^4}{256}\right)},$$

qui per numerum $n = 48\sqrt{3}$ prius multiplicandus est, ut formam fractionibus liberam induat. Videmus igitur, quod in aequatione quadratica ultima, a qua resolutio tandem pendet, irrationalis terminus $\sqrt{Y}$ appareat sub forma *fracta*, cum in differentiali finali:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

appareat sub forma *non* fracta. Res nihil habet in recessu, et supra jam occurrebat; tamen alicujus commoditatis causa elementum finale

$$\frac{dy}{\sqrt{(m^m y^{m-1} \pm (m-1)^{m-1} a^m)}}$$

quod §. 11. pro $x^m = ax + y$ obtinuimus, nunc sub forma *fracta* contemplabimur, quae sic habet:

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y^{m-1}}{(m-1)^{m-1}} \pm \frac{a^m}{m^m}\right)}} \qquad (H.)$$

ubi nimirum denominator per productum coefficientium Divisus apparet. — Nunc ad rem.

§. 21.

Aequatio $x^m = ax^{m-2} + \dots y$ si resolvi potest, immediate non reducetur nisi ad gradum proxime inferiorem $z^{m-1} =$ et caet., et sic porro deprimendo tandem tandemque pervenietur ad aequationem quadraticam finalem:

$w^2 = \varphi w - \psi$;

quae resoluta criterium irrationale $\sqrt{\Upsilon}$ spectandum sistet. Ergo $\sqrt{\left(\frac{\varphi\varphi}{4} - \psi\right)}$ designabit valorem $\sqrt{\Upsilon}$. Jam vero cum pro casu simplici $x^m = ax + y$ paragrapho praecedente habeamus:

$$\sqrt{\Upsilon} = \sqrt{\left(\frac{y^{m-1}}{(m-1)^{m-1}} \pm \frac{a^m}{m^m}\right)}, \qquad (K.)$$

ergo irrationale hoc est $= \sqrt{\left(\frac{\varphi\varphi}{4} - \psi\right)}$. Ex hac sola aequatione impossibile erit, determinare ambas incognitas φ et ψ; nec igitur sic ad quadraticam finalem resolventem:

$$w^2 = \varphi w - \psi$$

perducimur. „Sed si natura functionis (*K*) in subsidium vocetur, determinatio ipsarum φ et ψ *praeclare succedet.* Cum nempe irrationale (*K*) *Binomium* tantum sit, et irrationale $\sqrt{\left(\frac{\varphi\varphi}{4} - \psi\right)}$ *itidem* binomium, detexi hinc rem sane pulcherrimam, (et *perfecte postea confirmatam*, ut videbimus,) quod scilicet ex ipsius irrationalis binomii *K*) intuitu edoceamur, *uter ex ambobus ejus terminis quadratum* $\frac{\varphi\varphi}{4}$ *exprimat*; et valore φ sic invento, subinde habetur ψ, et habetur quadratica resolvens finalis:

$$w^2 = \varphi w - \psi.“$$

Res *Exemplis* nunc illustranda est; quae simul indigitabunt, quod (non quidem Immediata resolvens $z^{m-1} =$ et caet., sed tamen saltim resolvens *quadratica finalis*) $w^2 = \varphi w - \psi$ coefficientes φ, ψ *rationales* habitura sit.

§. 22.

Sit $m = 2$, ut fiat $x^2 = ax + y$; ergo ex (*K*) obtinemus:

$$\sqrt{\Upsilon} = \sqrt{\left(y + \frac{a^2}{4}\right)}.$$

Cum resolvenda ipsa sit *quadratica* tantum, hinc fit, ut

qui *Ipse* quadratus est. Et sic sponte videbis, quod alternis vicibus jam *prius* et jam *posterius* functionis $\sqrt{Y}$ membrum quadrato $\frac{\varphi\varphi}{4}$ responsurum sit. — „Formulas autem esse *justas*, patebit Infra."

§. 24.

Explicanda nunc est res quaedam supra §. 22. incidenter commemorata, propter quam filum ibi abrumpendum non videbatur; quo negotio expedito deinde cetera ordine non interrupto persequemur. —

Initium fiat a cubica. Si proponitur $x^3 = ax + y$, ponendo $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ pervenitur ad resolventem:

$$z^2 = yz - \frac{a^3}{27}, \text{ radicum } A, B.$$

Si ponatur jam $z = nw$, hoc est:

$$A = nM$$
$$B = nN,$$

tum resolvens in hanc formam abit:

$$w^2 = \frac{y}{n} w - \frac{a^3}{27nn}, \text{ radicum } M, N.$$

Quodsi *posterior* haec jam tanquam resolvens usurpetur, id solutioni nihil omnino officit, nisi quod jam ponendum est:

$$x = \sqrt[3]{\frac{A}{n}} + \sqrt[3]{\frac{B}{n}}.$$

Ergo transformatio $z = nw$ *salva resolutione* peragitur, et numerus n prorsus *Arbitrarius* est, et pro $n = 1$ iterum redit solutio vulgaris Cardani. In arbitrarium hunc numerum n alia jam occasione supra incidimus sub finem §. 18., quem lectores respicere velint. Nempe si illic in aequatione:

$$zz = 3myz\sqrt{3m} - m^3a^3$$

substituatur $z = 3m\sqrt{3m} \,.\, w$, transit in formam vulgarem:

$$w^2 = yw - \frac{a^3}{27},$$

et quod hic n diximus, illic fuit $3m\sqrt{3m}$. Cum ergo talis numerus arbitrarius et indeterminatus ultro quasi se offerat, unice quaestio est, *quinam* valor huic numero n commodissime et naturae rei congruentissime tribuendus sit. Eam rem nunc ex unice vero principio explicabimus in primis ob *altiores* casus. Nam quamvis precarius hic numerus ad resolvendi negotium omnino Nihil facit, tamen ratio saltim reddenda est, cur verbi causa aequatio (§. 22, *M.*), aequationi (§. 10. *T.*), quae habet radices octuplo majores, ideoque minus esse simplex videtur, nihilominus *postponenda* sit. — Res breviter sic habet.

§. 25.

Adhibeamus cubicae $x^3 = ax + y$ resolventem aequationem

$$w^2 = \frac{y}{n}\, w - \frac{a^3}{27nn}, \text{ radicum } M \text{ et } N,$$

in qua nempe pro w scriptum est nw, ut numerus arbitrarius n determinetur. Is, qui maxime *Naturalis* est; nam hoc est, quod jam agitur.

Cum ergo sit $M+N = \frac{y}{n}$ et $MN = \frac{a^3}{27nn}$ vel $a = 3\sqrt[3]{nn\,MN}$, habemus inde:

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{nnMN} + n(M+N).$$

Hinc via valoris n aptissime determinandi sponte patet. Ut enim aequatio praecedens cubica fiat *simplicissima* et ab irrationalitate supervacua *immunis*, eligendus est inter numeros naturales primus occurrens n *hujus* virtutis, ut ejus quadratum nn perfecte *cubus* sit; primus talis numerus autem est manifesto $n = 1$.

Porro jam sit $x^4 = bx + y$, (nam simplex casus hic sufficit). Pro biquadratica hac aequatione obtinuimus supra in (§. 22. *M.*) ultimam resolventem quadraticam (quoad numeros absolutos apparenter simplicissimam) hanc:

$$w^2 = \frac{bb}{8}\, w + \frac{y^3}{27}.$$

Ut vero pateat, simplicitatem hanc esse *apparentem* tantum, ponamus nw pro w, ut fiat:

$$H.)\quad w^2 = \frac{bb}{8n}\, w + \frac{y^5}{27nn} \text{ radicum } M,\ N.$$

Ex quadratica hac iterum retro determinemus aequationem comparabilem biquadraticam; nempe ex his ambabus:

$$M + N = \frac{bb}{8n} \text{ et } MN = -\frac{y^5}{27nn}$$

consequitur:

$$x^4 = 2x\sqrt{2n}(M+N) - 3\sqrt[3]{nnMN}.$$

Ad vitandam ergo superfluam irrationalitatem eligendus est pro n numerus ejus naturae, ut ejus duplum $2n$ sit *quadratum*, et ejus quadratum nn sit *cubus*. Percurrendo jam numeros naturales aliquot, subinde disces numerum $n = 8$ satis facere, quoniam est $2n = 4^2$ atque $nn = 4^3$; unde fit:

$$x^4 = 8x\sqrt{(M+N)} - 12\sqrt[3]{MN},$$

quae nullam habet irrationalitatem numericam. Atque sic aequatio H) hanc formam induit:

$$w^2 = \frac{bb}{64}\, w + \frac{y^5}{27.64},$$

quae consentit jam cum quadratica finali (§. 10. T), et patet igitur, cur in aequatione (§. 22, M) pro w ipsius *octuplum* $8w$ poni magis naturale sit. —

Consultum autem videtur, eundem numerum n praeliminarie determinare etiam pro Sursolida, adhibendo casum, qui proposito sufficit:

$$x^5 = cx + y,$$

cui destinata est quadratica resolvens ultima:

$$\mathfrak{R}.)\quad w^2 = \frac{yy}{8}\, w - \frac{c^5}{5^5}.\quad (\text{§. 22. Fin.})$$

Posito nw pro w fit:

$$\mathfrak{M}.)\quad w^2 = \frac{yy}{8n}\, w - \frac{c^5}{5^5 nn} \text{ radicum } M,\ N.$$

Ex his:

$$M+N=\frac{yy}{8n} \text{ et } MN=\frac{c^5}{5^5 nn}$$

determinando c et y obtinetur:

$$x^5 = 5x\sqrt[5]{nn\,MN}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2n}(M+N).$$

Ergo debet esse $2n$ *quadratus* numerus, et nn *sursolidus*. Hac re utcunque libuerit expedita, obtinebitur $n=32$; est enim $2n=8^2$ et $nn=4^5$. Sic fit igitur:

$$x^5 = 20x\sqrt[5]{MN}+16\sqrt{(M+N)};$$

quae nullam habet irrationalitatem numericam. — Adhibendo jam numerum $n=32$ in quadraticam finalem ($\mathfrak{M}$) obtinemus:

$$w^2 = \frac{yy}{8.32}w - \frac{c^5}{5^5.32^2}.$$

quae jam finali ($\mathfrak{N}$) *simplicior* esse censenda est. — Cum numeri arbitrarii n consideratio, utut memorabilis, tamen quoad Resolvendi negotium nullius momenti sit, eam rem nunc missam facimus; caeterum paulo attentius eum hic considerasse juvabit etiam propter *sequentia*, siquidem numerum hunc arbitrarium (ob rei naturam) etiam in subsequentibus obvium habebimus, ut mox patebit.

§. 26.

Quae reliqua sunt, ea jam non poenitendae lectorum attentioni commendamus. Si aequatio aliqua, verbi causa $x^4 = ax^2 + bx + y$ habet *resolventem* suam, quae casu hoc istius formae erit:

1.) $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma,$

resolvens haec valebit pro quocunque ipsius y valore determinato, et exprimetur x per a, b, y, quidquid variabilis y designaverit. Resolutio valebit igitur etiam pro determinato valore $y = max$.

Sed casu hoc resolvenda induit hanc formam determinatam:

2.) $4x^3 = 2ax + b$

et resolvens induet hanc formam determinatam:

3.) $3z^2 = 2\alpha z - \beta$;
ex *hac* et ex resolvente completa (1) eliminando β fit:
4.) $2z^3 - \alpha z^2 + \gamma = 0$.

Cum ergo generalis aequatio $x^4 = ax^2 + bx + y$ resolventem generalem habet formae (1), sic *specialis* et ad casum y *maximi* determinata aequatio (2) habebit resolventem formae (4). Manifesto autem facilius erit, resolutionem aequationum ab hoc *Maximi* casu inchoare, siquidem aequatio resolvenda differentiando sic uno gradu *Deprimitur*. „Sic resolventis (4) coefficientes α, γ reperientur, ut videbimus, et coefficiens penultimus β, qui eliminando perierat, et *Ipse* detegetur ex nota functione $\sqrt{Y}$, quae nempe ob *maximi* casum sub forma $Y=0$ comparet. Exinde satis apparet, quid hic Theoriae subsit; cujus tamen consulto primas tantum lineas ducimus." (Monemus hac occasione, quod Aliud quoddam et insigne theorema huc pertineat, quo tamen explicando, ne longi simus, hac vice supersedemus.) — Quae modo diximus, ea nunc actu praestanda sunt, et commonstrandum, quod utique indigitata ratione ad resolutionem perveniri possit, functione relationali (quod sane mirum est,) prorsus ignota manente.

§. 27.

Ad evincendam ergo principii stabiliti efficaciam proposita sit resolvenda:

$$x^4 = ax^2 + bx + y$$

cui invenienda sit cubica resolvens:

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma.$$

Quaeratur ergo solutio pro casu $y = \max.$, ut igitur haec:

$$4x^3 = 2ax + b$$

transformanda sit in hanc:

$$2z^3 - \alpha z^2 + \gamma = 0.$$

Intuendo has ambas animadvertimus, utramque esse Ejusdem dimensionis, et in priori deesse membrum *secundum*, in

in posteriori membrum *penultimum.* Jam vero constat, aequationem termino secundo deficientem in aliam termino penultimo deficientem transmutari positione simplici $x = \frac{1}{z}$. Ergo in praesenti casu, ad conservandas dimensiones, ponamus $x = \frac{n}{z}$, vel potius (quia in transmutanda $4x^3 = 2ax + b$ pro $b = 0$ fit $x = 0$) ponatur $x = \frac{mb}{z}$. Sic resolvenda praedicta in hanc formam abit:

$$z^3 + 2amz^2 - 4m^3b^2 = 0,$$

quae cum hac:

$$z^3 - \frac{\alpha}{2} z^2 + \frac{\gamma}{2} = 0$$

comparata offert valores istos:

$$\alpha = -4am, \quad \gamma = -8m^3b^2.$$

Ergo jam pro *Generali* resolvente habemus:

$$z^3 + 4maz^2 + \beta z + 8m^3b^2 = 0.$$

Hinc inveniendus restat coefficiens jam solus β, qui ex nota functione Υ determinabitur, ut supra diximus; quo pacto autem hoc fiat, paulo distinctius exponendum.

§. 28.

Criterium $\sqrt{\Upsilon}$ est functio irrationalis ultima, a qua aequationis resolvendae radix tandem pendet. Nimirum aequatio

$$x^m = ax^{m-2} + \ldots y$$

reduci supponitur ad hanc: $z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \ldots$

et haec ad istam: $u^{m-2} = \lambda u^{m-3} - \ldots$

et cetera

tandem haec: $v^3 = \mu v^2 - \ldots$

reduci ad istam: $w^2 = \varphi w - \psi$;

quae finalis posterior si resolvatur, spectandum sistet criterium $\sqrt{\Upsilon}$. Functio haec obtinetur sub forma $\Upsilon = 0$, si resolvenda $x^m =$ et caet. differentietur pro $dy = 0$, et jam x eliminetur; ut jam dudum scimus.

Quodsi resolvenda $x^m = ax^{m-2} + \ldots y$ ad resolventem

$z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \ldots$ *Reducta* jam fuerit, tum haec $z^{m-1} =$ et cet. (quae ante *resolvens* fuerat,) nunc *Resolvendae* instar est; nempe reducenda est ad resolventem $u^{m-2} =$ et cet. et ad omnes retro succedaneos usque ad ultimam $w^2 = \varphi w - \psi$ criterio $\sqrt{\Upsilon}$ praeditam.

Habemus ergo sic novam resolvendam $z^{m-1} =$ et cet. (in coefficientium uno vel aliquibus variabilem y continentem,) de qua nova resolvenda igitur valebit idem, quod ante de resolvenda $x^m =$ et cet. dictum est, quod nempe, si pro $dy = 0$ hoc est pro sola z variabili differentietur, et ipsa z eliminetur, spectandum praebitura sit criterium $\Upsilon = 0$ idem, quod resolvenda

$$x^m = ax^{m-2} + \ldots y$$

simili modo tractata praebuerat. His praemissis ad rem redimus, atque subinde monstrabimus, quomodo casu nostro biquadratico coefficiens adhuc ignotus β ope aequationis $\Upsilon = 0$ eleganter inveniri possit.

Nimirum si $x^4 = ax^2 + bx + y$ pro $dy = 0$ differentietur, et x eliminetur, obtinebitur $\Upsilon = 0$, atque si resolvens $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ pro $dy = 0$ differentietur, et jam z eliminetur, prodibit praecise idem valor priori consentiens $\Upsilon = 0$. Harum eliminationum prior offert:

$$256y^3 + 128a^2y^2 + 16a^4y - 144ab^2y - 4a^3b^2 = -27b^4; \quad (M.)$$

posterior autem offert:

$$27\gamma^2 + (4\alpha^3 - 18\alpha\beta)\gamma + 4\beta^3 - \alpha^2\beta^2 = 0,$$

vel substitutis $\alpha = -4ma$ et $\gamma = -8m^3b^2$, qui jam inventi sunt, obtinemus:

$$\frac{\beta}{16m^6} - \frac{aa}{4m^4}\beta^2 - \frac{9ab^2}{mm}\beta + 32a^3b^2 = -27b^4. \quad (N.)$$

Aequationes (*M*) et (*N*) igitur secundum praecedentia jam debent esse *Identicae*, et expresse a nobis ita jam scriptae sunt, ut immediate aequari inter se possint. Sic obtinemus aequationem inter β, a, b, y, ex qua aequatione, cum incognita β non sit nisi *cubicae* dimensionis, utique β

in Potestate erit. Atque sic interim patet, nos promisso *stetisse* omnino, quo coefficientem β, qui ignotus manserat, beneficio criterii $\Upsilon = 0$ in potestate futurum dixeramus. Quamvis autem aequandis (M) et (N) aequatio praesto est quoad β *cubici* tantum gradus, tamen resolutio hujus cubicae manifesto molestissimi laboris erit; ergo cubicam hanc ad gradum *quadraticum* deprimamus.

Cum enim aequationes (M) et (N) sint identicae, ideoque y in β latere manifestum sit, ergo fas est utramque aequationem simul differentiare, ipsam (M) nempe pro y variabili, et ipsam (N) pro β variabili; sic loco ipsarum (M) et (N) has ambas novas obtinemus:

$$9ab^2 = \frac{3\beta^2}{16m^4} - \frac{aa}{2mm}\beta$$

$$9ab^2 = 48yy + 16aay + a^4$$

Ergo fit:

$$\frac{3\beta^2}{16m^4} - \frac{aa}{2mm}\beta = 48yy + 16aay + a^4;$$

hinc: $\beta = 4mm(aa + 4y)$.

Atque sic igitur pro generali biquadraticae resolvente (§. 27. sub finem) habemus:

$$z^3 + 4maz^2 + 4m^2(aa + 4y)z + 8m^3b^2 = 0,$$

quaerendo nempe primo resolventem *hujus*:

$$4x^3 = 2ax + b,$$

(quae resolvens offerebat α et γ,) deinde ipsam β ex nostra functione $\Upsilon = 0$ determinando! — Numerus absolutus m, (qualem in hoc negotio ubique obvium habuimus,) *arbitrarius* est, ut scimus, et satis est monere, quod pro $m = -\frac{1}{8}$ resolvens vulgaris prodeat.

§. 29.

Quaeritur jam porro hujus: $x^3 = ax + y$

resolvens haec: $z^2 = \alpha z - \beta$.

Earum prior casu maximi offert $3x^2 = a$, et posterior $2z = \alpha$, unde eliminando α, fit $z^2 = \beta$, prorsus ut in casu biquadra-

tico. Est ergo aequatio $x^2 = \frac{a}{3}$ transformanda in aequationem $z^2 = \beta$; harum prior deficientem habet *secundum*, et posterior *penultimum* terminum. (Praesenti casu membrum *secundum* simul est *Penultimum*, quod effecit, ut perspicuitatis causa biquadraticae resolutionem praemiserimus.) — Ad rem igitur expediendam ponatur $x = \frac{n}{z}$, vel cum in resolvenda speciali $3xx = a$, de qua nunc sermo est, x et a *simul* evanescant, fiat $x = \frac{maa}{z}$, (sic enim dimensiones postulant, ut mox patebit.) Hic valor pro x in aequationem $3xx = a$ impositus offert hanc:

$$zz = 3m^2a^3,$$

quae collata cum hac: $zz = \beta$, offert $\beta = 3m^2a^3$. Sic ergo pro *generali* cubicae resolvente habemus:

$$zz = \alpha z - 3m^2a^3,$$

in qua jam coefficiens α reliquus ex functione $\Upsilon = 0$ determinandus est. Cubica $x^3 = ax + y$ pro $dy = 0$ differentiata offert: $27y^2 = 4a^3$. (*M.*)

Resolvens $zz = \alpha z - \beta$ autem pro $dy = 0$ differentiata, eliminato z offert: $\alpha\alpha = 4\beta$, vel imponendo valorem pro β inventum:

$$\frac{\alpha\alpha}{3mm} = 4a^3. \qquad (N.)$$

ubi (*M*) et (*N*) manifesto idem repraesentant, quod §. 28. in casu biquadratico. His ergo aequandis habetur:

$$\alpha = 9my,$$

ut ergo sit resolvens generalis haec:

$$zz = 9myz - 3m^2a^3.$$

In hac ponatur, si lubet, $m = \frac{1}{9}$. Atque sic igitur theoriae hujus virtutem exemplo interim cubico et biquadratico evicimus; ubi notandum est autem, quod novi hujus principii *tantum* unice proferimus, quantum *scopo nostro sufficere* videatur.

§. 30.

Quamquam autem de diversis, quae ad praecedentem theoriam spectant, brevitatis causa silendum est, illustre tamen hujus rei specimen edere fas est in casu saltim simpliciori:

$$x^5 = ax + y,$$

Surdesolida haec transformanda sit in biquadraticam resolventem:

$$z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta.$$

Operatio ex praecedentibus exemplis praesertim *Biquadratico* patet, quo distinctissime rem omnem explicui; ergo nunc brevioribus esse nobis licet. — Ut igitur jam a casu *maximi* inchoemus, aequatio:

1.) $5x^4 = a$

valebit pro $dy = 0$, et resolvens pariter pro $dy = 0$ differentiata offert:

$$4z^3 = 3\alpha z^2 - 2\beta z + \gamma,$$

ex qua coefficientem γ in resolventem generalem imponendo obtinemus:

2.) $3z^4 - 2\alpha z^3 + \beta z^2 - \delta = 0.$

Agitur jam de transformatione ipsius (1) in ipsam (2). Si sursolidam *generalem* $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + y$ consideraremus, tum ejus differentiale $5x^4 = 3ax^2 + 2bx + c$, secundo termino deficiens, mutandum foret in ipsam 2), penultimo termino deficientem. Nunc autem in casu $x^5 = ax + y$ acquiescimus, et hunc in finem (nempe ad (1) in (2) transformandam) ponendum est, ut vidimus: $x = \frac{n}{z}$. Sed quoniam in transformanda aequatione $5x^4 = a$ pro $a = 0$ fit $x = 0$, ergo ponendum:

$$x = \frac{ma^q}{z}. \qquad O.)$$

Casu cubico vidimus esse $q = 2$, casu biquadratico erat $q = 1$; quaeritur ergo, qualis casu sursolido valor ipsi q tribuendus

sit. Res et hoc et quovis alio casu sponte expeditur consideranda terminorum Homogeneitate, ut statim videbimus. Valore (O) in ipsam $5x^4 = a$ subrogato, fit:

$$z^4 - 5m^4a^{4q-1} = 0;$$

quae cum ipsa (2) comparata offert:

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \delta = 15m^4a^{4q-1}. \qquad T.)$$

Resolvens generalis igitur pro $x^5 = ax + y$ hujus formae est:

$$z^4 = \gamma z - \delta. \qquad S.)$$

Harum prior pro $dy = 0$ differentiata offert:

$$3.)\ 5^5y^4 - 4^4a^5 = 0.$$

posterior autem, simili modo tractata offert:

$$4.)\ 27\gamma^4 - 256\delta^3 = 0.$$

Hae ambae (3) et (4) repraesentant functionem $\Upsilon = 0$, hinc erit δ^3 homogeneum cum a^5, hoc est δ cum $a^{\frac{5}{3}}$. Ergo in T) habemus $4q - 1 = \frac{5}{3}$, hinc $q = \frac{2}{3}$, et $x = \frac{ma^{\frac{2}{3}}}{z}$, et $\delta = 15m^4a^{\frac{5}{3}}$. Sic in S) habemus:

$$z^4 = \gamma z - 15m^4a^{\frac{5}{3}}.$$

Inventis ergo α, β, δ coefficiens reliquus γ ex functione nota $\Upsilon = 0$ reperitur; ex ipsa (3) nempe habemus:

$$5^5y^4 = 256a^5;$$

ex (4) autem, si valor inventus $\delta = 15m^4a^{\frac{5}{3}}$ substituatur, fit:

$$\frac{\gamma^4}{5^3m^{12}} = 256a^5.$$

Has ambas aequando obtinetur $\gamma = 25m^3y$, ut ergo aequationis $x^5 = ax + y$ resolvens haec sit:

$$z^4 = 25m^3yz - 15m^4a^{\frac{5}{3}}. \qquad R.)$$

„Biquadratica haec resolvens reducetur ad cubicam, et cubica tandem ad quadraticam finalem:

$$w^2 = \varphi w - \psi.$$

Ergo cum finalem hanc supra (§. 22. fin.) *a posteriori* determinaverimus, quaeritur jam utrum cum praecedente sit Consensura. —" Quod nobile experimentum nunc instituendum est.

§. 31.

Aequatio $z^4 = \mathfrak{A}z^2 + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}$ habet resolventem, ut scimus, hanc:

$$u^3 = \frac{\mathfrak{A}}{2} u^2 - \left(\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A} + 4\mathfrak{C}}{16}\right) u + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{64}.$$

Ergo cum pro aequatione R) habeamus:

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 25m^3y, \quad \mathfrak{C} = -15m^4a^{\frac{5}{3}};$$

ideo resolvens cubica talis est:

$$u^3 = + \frac{15m^4a^{\frac{5}{3}}}{4} u + \frac{25^2m^6yy}{64}. \qquad H.)$$

Porro aequatio $u^3 = \mathfrak{M}u + \mathfrak{N}$ habet resolventem, ut scimus, hanc:

$$w^2 = \mathfrak{N}w - \frac{\mathfrak{M}^3}{27}.$$

ergo aequatio H) habet resolventem hanc;

$$w^2 = \frac{5^4m^6yy}{64} w - \frac{5^3m^{12}a^5}{64}.$$

Tribuatur jam numero arbitrario m valor $m^6 = \frac{8}{5^4}$, sic fiet;

$$w^2 = \frac{yy}{8} w - \frac{a^5}{5^5};$$

cum qua finalis aequatio quadratica §. 22. mire consentit!

§. 32.

Quia prolixos calculos perodimus, pro rei novitate et praestantia ad casum saltim:

$$x^m = ax + y$$

pergimus. Quoniam m hic *exponentem* denotat, numerum arbitrarium per n exprimemus. Ceterum cum ne ulla quidem operatio occurrat, nisi quae in praecedentibus jam exemplis occurrerit, negotium hoc penes benevolum lectorem relinquimus. Ponendo $x = \frac{na^q}{z}$ ratione ea, qua supra dixi, detegetur esse:

$$q = \frac{2}{m-2},$$

Pro aequatione $x^m = ax + y$ igitur in Resolventem:

$$z^{m-1} = \alpha z^{m-2} + \ldots \pm \theta z \mp \kappa$$

transformanda prorsus ut hactenus procedendo manifestum fiet, esse $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et cetera, ut restet:

$$z^{m-1} = \pm \theta z \mp \kappa. \qquad T.)$$

Criterium $\Upsilon = 0$ ex resolvendae $x^m = ax + y$ differentiatione obtinebis *tale*:

$$m^m y^{m-1} \mp (m-1)^{m-1} a^m = 0;$$

ex ipsius T) autem differentiatione *tale*:

$$(m-2)^{m-2} \theta^{m-1} \mp (m-1)^{m-1} \kappa^{m-2} = 0.$$

Cetera nunc ad modum priorum exemplorum ipse, si lubet, perage; quo facto pulchre prodibit ipsius $x^m = ax + y$ resolvens haec:

$$z^{m-1} = \pm mmn^{m-2} yz \mp m(m-2) n^{m-1} a^{\frac{m}{m-2}}. \qquad (O.)$$

ubi + valet pro m impari, et — pro m pari.

Verbi causa pro *Cubica* pone $m = 3$, atque (si lubet,) $n = \frac{1}{9}$; pro *Biquadratica* pone $m = 4$, atque (si lubet,) $n = \frac{1}{8}$; pro *Sursolida* pone $m = 5$, ut fiat:

$$z^4 = 25n^3 yz - 15n^4 a^{\frac{5}{3}},$$

ut supra (§. 30. *R.*)

§. 33.

Quod igitur §. 1. a nobis praestitum esse diximus pro hypothesi Euleriana *non* sufficiente, id jam pro vera resolvente praestitum est; tradidimus nempe pro casu saltim interim $x^m = ax + y$ generalem resolventem, gradus omnes una formula complectentem. Formula generalis §. 1. commemorata ab $m = 5$ inde *aberrare* coepit, (eo, quem ibi dixi, sensu); quod ipsum a *labe quadam* hypotheseos $x = \sqrt[m]{A} + \ldots$ proficiscitur, quam labem valde abstrusam et vix evitabilem fuisse, olim demonstrabimus. — Si spectes *transformatam*:

$$z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \ldots \pm \kappa \qquad (1. \text{ §. } 39).$$

ex ista hypothesi consequentem, (cujus transformatae terminum generalem pro membro saltim ultimo π ibi exhibuimus,) atque si transformatam hanc ab $m=5$ inde *Aberrantem* videris, tum haesitabis utique dubitans vel de *Resolubilitate* sursolidae, vel si culpam in *hypothesin* transferas, non facile saltim mente assequeris, quo pacto tandem hypothesis *corrigenda* sit, siquidem gradibus inferioribus actualiter *sufficiebat*, et *universalitatem* utique prae se ferebat, inferiores gradus legitime *involventem*, in altioribus *aberrantem*. —

Ergo hic *indigitandum* saltim interim est, quatenus hypothesis vera et ad resolventem (§. 30. *R*) perducens cum Euleriana consensura vel ab ea ablusura sit. In aequatione (§. 32. *O*) nempe fiat $m=3$, (et si lubet, $n=\frac{1}{9}$) ut fiat:

$$zz = yz - \frac{a^3}{27} \text{ radicum } A, B;$$

Sic erit $A+B=y$, $3\sqrt[3]{AB}=a$, hinc emergit aequatio propositae $x^3=ax+y$ comparabilis notissima:

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B.$$

Similiter jam procedatur pro $x^4=ax+y$, ponendo nempe in resolvente (*O*) praedicta $m=4$ (et si lubet $n=\frac{1}{8}$); idemque fiat pro $x^5=ax+y$, ponendo $m=5$. Exinde tales comparabiles emergunt:

1.) $x^3 = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B$

2.) $x^4 = 8x\sqrt[4]{A^2B^2C^2} + 4(AB + \ldots)$

3.) $x^5 = hx\sqrt[5]{A^3B^3C^3D^3} + k(ABC + \ldots)$

(Literae *h* et *k* non designant nisi valores numericos, qui emergent, prouti arbitrario numero *n* hunc vel illum valorem tribueris.) Ex hoc systemate primum *lex* functionum occurrentium pulcherrime patet. Secundo *discrepantiam* aequationis (3) a comparabili Eulero-nostra (I. §. 28.) anim-

advertes. Aequatio enim loci citati, ad casum nostrum specialem $x^5 = ax + y$ accommodata talis est:

$$x^5 = 30x\sqrt[5]{ABCD} - 5(\sqrt[5]{A^3B^2} + \ldots) + A + B + C + D,$$

ex qua discrimen, inter hypothesin $x = \sqrt[5]{A} + \ldots$ et inter *veram* hypothesin (quae nempe ad comparabilem (3) perductura est,) intercessurum praeclare in oculos cadit.

§. 34.

Quoniam praeter theoriam §. 26. expositam adhuc alia et quasi *immediata* rei considerandae methodus existit, ejus rei saltim *aliquid* attingemus, tum in commodum lectoris benevoli, tum ut pateat, veram ejus rei indolem non ignotam nobis fuisse. Verbi causa si quis hanc $x^4 = ax^2 + bx + y$ ejusque resolventem $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ consideret, et ipsam:

$$4x^3 = 2ax + b \qquad A.)$$

Immediate cum ipsa:

$$3z^2 = 2\alpha z - \beta \qquad B.)$$

comparare velit, ad sequentia attendendum. — Aequatio A) si differentietur, et jam x eliminetur, offert finalem functionem, a qua cubicae hujus resolutio pendet, hanc:

$$27bb - 8a^3 = 0 \qquad M.)$$

Aequatio B) autem sic tractata offert criterium finale:

$$\alpha\alpha - 3\beta = 0$$

vel pro α et β suos veros valores, qui sunt $\alpha = \frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{aa + 4y}{16}$, ponendo:

$$aa - 12y = 0 \qquad N.)$$

Haec ambo finalia M) et N), quamvis identica sint, nondum tamen identitatem hanc prae se *ferunt* nec ferre *possunt*, tum quia *dimensiones* non consentiunt, tum quia manifesto diversas literas continent. — Sequenti jam via et ad Homogeneitatem et ad perfectam Identitatem reducuntur.

Criterium $\mathfrak{Y}$ ad biquadraticam $x^4 = ax^2 + bx + y$ pertinens, et ob casum maximi sub forma $\mathfrak{Y} = 0$ propositum, ex I. §. 9. tale habemus:

$$27b^4 - 4a^3b^2 + 128a^2y^2 + 16a^4y + 256y^3 - 144ab^2y = 0.$$

Quemadmodum jam functionem finalem M) obtinuimus, ipsam A) pro $b = max.$ differentiando, sic ergo praecedentem aequationem differentiabimus pariter pro $db = 0$, unde fit:

$$27\,bb - 2a^3 - 72\,ay = 0 \qquad S.)$$

ex *hac* et M) eliminando terminum $27\,bb$, obtinemus:

$$aa - 12y = 0,$$

quod est jam ipsum (N.); atque sic igitur identitas functionum M) et N) cadit in oculos. — Porro si functio superior $\mathfrak{Y} = 0$ quoad literam b resolvatur, tum fit:

$$27\,bb = 2a(aa + 36y) + (aa - 12y)\sqrt{(aa - 12y)},$$

ubi irrationale finale nostrum $\sqrt{(aa - 12y)}$ ultro conspicuum est, et irrationali hoc posito $= 0$, tum remanet functio S. Porro tandem, si ex $aa - 12y = 0$ valor ipsius y in functionem $\mathfrak{Y} = 0$ imponitur, tum prodit $27bb - 8a^3 = 0$. Ex quo clare jam intelligitur, quomodo functiones finales:

$$27bb - 8a^3 = 0$$

atque $\quad aa - 12y = 0$

inter se cohaereant. — Sed satis de hac re.

§. 35.

Atque haec a §. 26. inde pro theoria hac degustanda satis sunto; alia inventa huc spectantia hac vice supprimimus prolixitatis metu. Nobis inter scribendum et meditandum altera post alteram lux ostensa est; sed jam requie et silentio opus est. Aequationum resolventium a nobis inventarum varias pulcherrimas proprietates communes detexi, quarum saltim unam, quae paucis exponi potest, proponam.

Cubicae $x^3 = ax + y$ resolvens est $zz = yz - \frac{a^3}{27}$. Hinc:

$$y = z + \frac{a^3}{27z}$$

In finali nostra igitur:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\S.\ 11.)\ \text{nro. 1.}$$

elementum sinistrum penitus per z exprimi potest. Hanc transformationem, ut pote non molestam, lector benevolus ut *Ipse* expediat, rogatus esto. Necesse est enim, ut *ipse* eventum discat, esse nempe:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dz\sqrt{27}}{z},$$

hoc est, factorem in numeratore et denominatore communem *excidisse.* Supponendo igitur, lectorem dicto obedientem nobis fuisse, subinde ad Biquadraticam transeo. Pro $x^4 = ax + y$ nempe resolvens est:

$$z^3 = -\frac{y}{4}\ z + \frac{aa}{64},\ \text{ut scimus.}$$

Hinc: $y = \frac{aa}{16z} - 4z^2$.

Ergo *hic* quoque in finali in casum hunc competente:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dy}{\sqrt{X}} \quad (\S.\ 11.)\ \text{nro. 2.}$$

elementum sinistrum (a lectore Ipso, si placet,) exprimatur per z. Habet autem operatio haec minus taedii quam voluptatis. Reperietur autem sic obtineri:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{-dz}{4\sqrt{(aaz - 16z^4)}},$$

et qui calculum *ipse* perfecit, is jam probe scit, excidisse *hic* quoque *factorem* in numeratore et denominatore *communem*, qui est $aa + 128z^3$.

Pergamus tandem ad casum $x^5 = ax + y$, cujus resolvens est: $z^4 = 25n^3yz - 15n^4a^{\frac{5}{4}}$. (§. 32. fin.)

Hinc: $y = \frac{3na^{\frac{5}{4}}}{5z} + \frac{z^3}{25n^3}$,

ubi numerum arbitrarium n vel relinques, vel quemcunque valorem pro lubitu illius vice substitues. Quodsi nunc in finali:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\S.\ 11.)\ \text{nro. 3.}$$

elementum sinistrum per z exprimatur, tum factorem communem hic quoque excidentem observabis, ita ut haec forma contractior prodeat:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{3n^2 dz}{\sqrt{5}.\sqrt{(z^8 + 70n^4 a^{\frac{5}{3}} z^4 + 2025 n^8 a^{\frac{10}{3}})}}.$$

Est autem hic factor evanescens pro generali aequationum resolventium proprietate habendus, et causa ejus rei atque significatio factoris non difficulter detegitur. Sed satis est.

§. 36.

Transformatas tres §. 35. inventas ita scribamus:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Haec igitur formula differentialis, (quamvis excepto casu cubico

$$\frac{dy}{\sqrt{(27y^2 \quad 4a^3)}} = \frac{dz\sqrt{27}}{z}$$

integrari separatim nequeat,) manifesto tamen vi praecedentis paragraphi Resolventem *ipsam* pro integrali agnoscit. Sed cum semper sit:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

ergo habetur etiam *haec* differentialis aequatio:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

cujus integrale sistet functionem ipsorum x et z, nempe nobis dictam *Relationalem.* Sic verbi causa pro casu cubico obtines differentialem aequationem:

$$\frac{dx}{\sqrt{(3xx - 4a)}} = \frac{dz\sqrt{27}}{z}$$

quae integrata relationalem $z^{\frac{2}{3}} = xz^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}$ praebet. Sed cum integratio in casibus superioribus non procedat, hinc ex nota resolvente innotescit quidem ipsius relationalis aequationis *differentiale*: $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}$

sed nequaquam aequatio relationalis *Ipsa*. Relationalis haec etiam in theoria §. 26. inde exposita ignota manet; quae enim illic occurrit relationalis $x = \frac{n}{z}$, ea ad casum *maximi* valet.

Ergo §. 26. et sequentibus, pro cubica, biquadratica et cet. *resolventes* quidem deteximus, nexum relationalem autem inter z et x Indeterminatum reliquimus. Cum ergo haec functio $F(x, z) = 0$ nondum constet, ideo etiam functio illa *altera* seu *Coexistens* (§. 15.) latet: $x = (A, B, C \ldots)$, hinc etiam supra §. 33. praesto quidem fuit sursolidae *comparabilis*:

$$x^5 = hx \sqrt[3]{A^3 B^3 C^3 D^3} + k(ABC + \ldots),$$

sed functio $x = (A, B, C, D)$, qua ad hanc comparabilem *pervenitur*, adhuc *ignoratur*.

„Ea res cum cossam penitus Absolvere censenda sit, pro rei dignitate Singularem tractationem poscit. Nunc in anagrammate acquiescimus:
TeeebpporrXpdadeessnloersvmquuubaFqqddaoualimesantaonmsiuxzounroiigmsxsudrastaoolubiteYneedsustcrreetmoucraaulolitcle."

Ceterum cossicam scientiam, quae paene obdormiverat, et quae tamen praeclara et pulchra est, et immortale quid sapit, redintegrato Mathematicorum studio commendamus; quod hoc scriptum attinet, humanum lectorem rogamus, ut boni consulat.

---

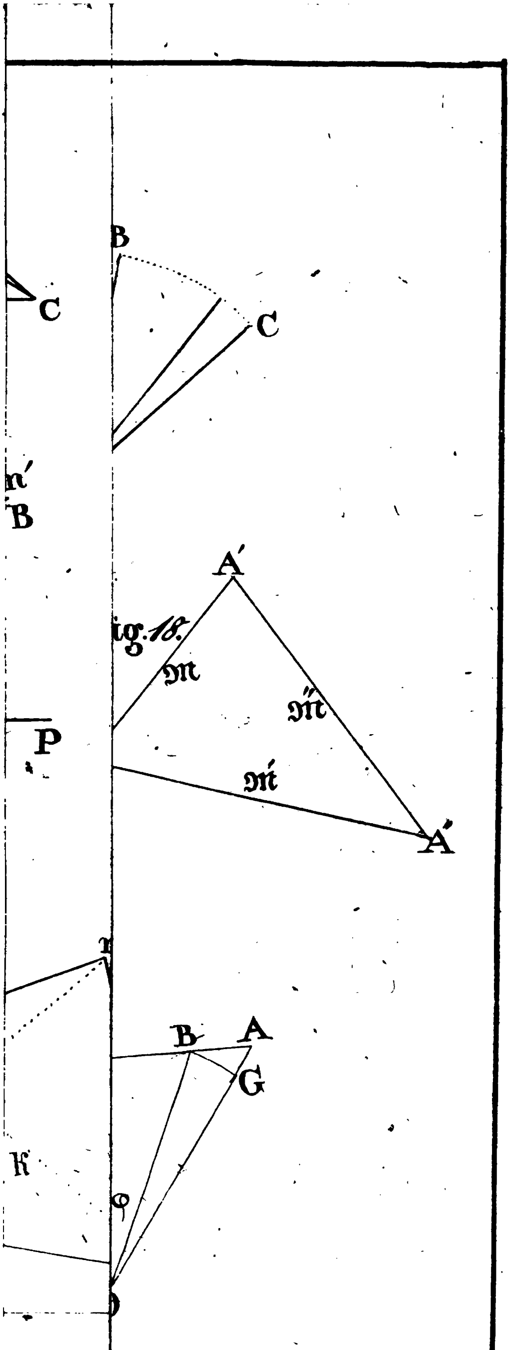
* Quos juvat, in hac re curiosius occupari, iis eveniet, ut insignem in hoc negotio utilitatem cujusdam problematis perspiciant, quod sic habet. Proposita aequatione:

$$u^n = Au^{n-1} + Bu^{n-2} + \ldots Hu + K,$$

quae in coefficientibus $A, B \ldots K$ variabilem aliquam x utcunque continet, ut igitur sit:

$$dA = Pdx,\ dB = Qdx, \ldots \ dK = Sdx,$$

invenire aequationem: $\frac{du^n}{dx^n} = \mathfrak{A} \frac{du^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots \mathfrak{M} \frac{du}{dx} + \mathfrak{N}$, ita, ut $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots \mathfrak{N}$ per $A. B, \ldots K$ et $P, Q, \ldots S$ exprimantur.



Tab. I

APOLLONIUS SUEVUS.

SIVE

TACTIONUM PROBLEMA NUNC DEMUM RESTITUTUM.

ACCEDENTE CENSURA IN VIETAM.

AUCTORE
GUILIELMO LUDOVICO CHRISTMANN.

TUBINGAE
LITERIS HOPFERI DE L'ORME.
1821.

Quum præsens libellus typis excusus esset, ad æneas tabulas insculpendas auctori sumtus defuerunt. Eas tabulas Wilhelmus, Rex Noster animo sumtuque Regio sculpi mandavit. Hoc ne nescius esset Lector, præfandi causa commemorare religio fuit.

a. *Apollonius Pergaeus* problema tactionum tractavit olim libris duobus, qui dudum amissi sunt, quo jubetur describi circulus, qui circulos tres datos contingat. Quia datorum circulorum aliqui, vel etiam omnes, abire possunt in *puncta data*, vel etiam in *rectas* positione datas, ideo (per legem combinationum) oriuntur promiscua *decem* problemata, quae *Franciscus Vieta* a. 1600 in Apollonio Gallo conatus est restituere. Qui praestantissimus Geometra licet eleganter satis nec sine admiratione aequalium in re versatus fuerit, aberrasse tamen censendus est non modo â verâ *metaphysicâ*, sed et â genuinâ, ut ita dicam, *Geometriâ* problematis. Immo vero in hâc materiâ Galliam quasi triumphantam videbimus, cedetque res in prostitutionem etiam aliquam ipsius *Graeciae*, siquidem ne Apollonius quidem negotium recte transegisse demonstrabitur. Sed absit invidia verbo. — Problemati huic multi mortales operam dedere; quorum pars vestigiis *Vietae* inhaesit, non sine detrimento scientiae; pars reliqua rem per *algebram* tractarunt, formulasque dederunt, ut dicam quod res est, plerumque prorsus inutiles. Cui quidem alteri defectui pariter medelam adferam. Tactionum problema deducit primâ fronte ad *Hyperbolas*, vel etiam (si calculo *incaute* utaris) ad *Biquadraticam*; unde qui algebrâ usi sunt, plerumque satis habuerunt, si formula intra gradum quadraticum consisteret. — Ego vero admiratus hanc *ipsam*, quam dixi, problematis apparentem indolem *plus quam elementarem*, in veram rei Metaphysicam investigavi; quae exponetur in sequentibus. Proposi-

tum est mihi complecti hoc scripto Essentiam eorum, quae circa hanc materiam scitu digna sunt, sive ad *Geometriam* spectent, seu ad *Algebram*; hinc à simplici et populari tractatione initium faciam, et resolutiones aliquot analyticas eo, quo subinde in illas incidi, ordine praemittam.

§. 2.

Sit (Fig. 1.) $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, sintque radii circulorum $= m$, n, r, quemadmodum facilitandae lectionis causâ ipsi figurae adscripti sunt. Radius quaesitus est $o = x$. Erit pro triangulis BAO et BCO:

1. $a^2 + (m+x)^2 - 2a(m+x) \operatorname{Cos}(B-\varphi) = (n+x)^2$
2. $c^2 + (m+x)^2 - 2c(m+x) \operatorname{Cos}\varphi = (r+x)^2$ Vel:
3. $a^2 + m^2 - n^2 + 2(m-n)x = 2a(m+x)\operatorname{Cos}(B-\varphi)$.
4. $c^2 + m^2 - r^2 + 2(m-r)x = 2c(m+x)\operatorname{Cos}\varphi$.

Divide aequationem (3) per $2a$, et (4) per $2c$, tum induent formam respective hanc:

5. $f + gx = (m+x)\operatorname{Cos}(B-\varphi)$
6. $h + kx = (m+x)\operatorname{Cos}\varphi$.

Ex his ambabus ejectâ x, manifesto $\operatorname{Cos}\varphi$ datur per *quadraticam*, proditque forma $A\operatorname{Sin}\varphi + B\operatorname{Cos}\varphi = C$. At vero cum tali operatione plane nihil actum est, ideoque hoc resolutionis genus, ita nempe adornatum, ne in censum quidem venit. Quid enim *praestitum* resolutione tali foret? Haberes quaesitum cosinum per chaos quantitatum sex a, b, c, m, n, r expressum, quod vel intueri perhorresces, nedum construere. — Deinde, (quod longe potissimum est) momentum totius rei positum est in *Symmetriâ*, quae huic problemati inest, et quâ a *millibus* ejusdem categoriae problematibus eleganter discrepat. Habes nimirum tria *latera* a, b, c, regulariter disposita cum tribus *radiis* m, n, r; unde liquet, formulam pro x futuram esse *Symmetricam*, id est, singulum *radium* cum duobus dati trianguli *lateribus*, quibus interjacet, pari et *simili* conditione in formulam ingressurum esse. Ergo cum radius x non detur nisi

per *quadraticam* $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, necesse est, horum α, β, γ singulum *per se* futurum esse symmetricum. Atque sic ergo praeparatur sane magnificum spectaculum, aequationis nempe quadraticae, quae coefficientes habet secundum perfectam *Symmetriam* dispositos. — Sed hanc rem omnem infra suis locis dilucidabimus. — Ceterum patet jam, resolutionem supra allatam nequaquam fore symmetricam. Continet enim quantitates datas m, n, r, a, c, Cos B, quo introducto cosinu symmetria manifesto turbatur et evertitur. — Atque haec est *prima* essentialis circa problema nostrum observatio, nempe de *Symmetriâ* in problemate hoc servandâ.

§. 3.

Sequitur solutio *altera*. Hanc eo lubentius addimus, quod operationibus valde concinnis, ad Symmetriam, quam hoc problema requirit, accommodata est. — In $\triangle BOC$ habetur (Fig. 1.):

$$c : m + x = \text{Sin}(\varphi + \psi) : \text{Sin}\,\psi.$$

$$c : r + x = \text{Sin}(\varphi + \psi) : \text{Sin}\,\varphi,$$ Ejecto x fit:

$$1.\ \text{Sin}\,\psi - \text{Sin}\,\varphi = \frac{m - r}{c}\,\text{Sin}(\varphi + \psi).$$

Similes jam aequationes porro pro $\triangle BOA$ et $\triangle COA$ habentur; quae Trias aequationum autem â tractabili forma adhuc abhorrent. Hinc ista (1) ejusque ambo dictae conjugatae ad legitimam *formam* revocandae sunt.

$$\text{Est Sin}\,\psi - \text{Sin}\,\varphi = 2\,\text{Sin}\,\frac{\psi - \varphi}{2}\,\text{Cos}\,\frac{\psi + \varphi}{2}.$$

$$\text{et Sin}(\varphi + \psi) = 2\,\text{Sin}\,\frac{\varphi + \psi}{2}\,\text{Cos}\,\frac{\varphi + \psi}{2}.$$

Quibus in istam (1) impositis, fit:

$$2.\ \text{Sin}\,\frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{m - r}{c}\,\text{Sin}\,\frac{\psi + \varphi}{2}.$$

Hoc explicato et per cosinus diviso habetur:

$$3.\ \text{tang}\,\frac{\varphi}{2} = M\,\text{tang}\,\frac{\psi}{2};\ \text{ubi}\ M = \frac{c + r - m}{c - r + m}.$$

Aequationes, jam pro reliquis dictis ambobus triangulis e solâ comparatione cum praecedente (3) habentur, scribendo nempe terminos, qui in figurâ huic (3) analogi sunt. Sic oriuntur hae tres *Conjugatae*:

$$4.\ \tang\frac{\varphi}{2} = M \tang\frac{C-\lambda}{2}.$$

$$5.\ \tang\frac{\lambda}{2} = N \tang\frac{A-\theta}{2}.$$

$$6.\ \tang\frac{\theta}{2} = R \tang\frac{B-\varphi}{2}.$$ Ubi nempe porro:

$$N = \frac{b+n-r}{b-n+r};\ R = \frac{a+m-n}{a-m+n}.$$

Hoc trium aequationum systema inter se perfecte symmetricum est. Jam tangentes, qui sunt ad dextram, explicandae sunt ope vulgaris formulae $\tang(\alpha-\beta) = \frac{\tang\alpha - \tang\beta}{1+\tang\alpha\tang\beta}$; deinde levissimâ operâ alterutras duas ignotarum tangentium eliminabis. Prodibit quadratica hujus formae:

$$\tang^2\frac{\varphi}{2} = A \tang\frac{\varphi}{2} + B.$$

In hâc reductione autem subsisto; nam de actuali talium quadraticarum formâ *infra* demum sermo erit.

§. 4.

Solutionem *tertiam* priusquam proponimus, commemorandum est problema, non difficile quidem sed perelegans, et quod cum tactionum problemate arcte *cohaerere* demonstrabimus. Ergo si illud praetermitterem, tractatio nostra manca foret. Datis nempe circulis tribus, inveniendum sit punctum, ex quo tangentes *aequales* ad istos circulos educuntur. Adhiberi huic scopo potest Fig. 1, et sit O illud punctum quaesitum. Fiat $AO = x$, $BO = y$, $GO = z$; sitque tangens ista aequalis $= t$. Erit:

$$1.\ a^2 - 2a\,x\,\mathrm{Cos}\,\theta + x^2 = y^2$$

$$2.\ b^2 - 2b\,x\,\mathrm{Cos}\,(A-\theta) + x^2 = z^2.$$

Jam ex conditione problematis est:

$$t^2 = (x+n)(x-n) = (y+m)(y-m).$$

$$t^2 = (x+n)(x-n) = (z+r)(z-r). \quad \text{Vel:}$$

$$x^2 - n^2 + m^2 = y^2,$$

$$x^2 - n^2 + r^2 = z^2,$$

quibus valoribus in (1. 2) impositis habetur:

$$3.\ \frac{f}{x} = \text{Cos}\,\theta. \qquad 4.\ \frac{g}{x} = \text{Cos}(A-\theta);$$

ubi nempe $f = \frac{a^2+n^2-m^2}{2a}$, $g = \frac{b^2+n^2-r^2}{2b}$.

Fiat jam $\theta = \alpha + \pi$, $A - \theta = \alpha - \pi$, hinc $\alpha = \frac{A}{2}$. Sic loco istarum (3. 4) habebis:

$$\frac{g+f}{2x\,\text{Cos}\,\alpha} = \text{Cos.}\,\pi. \qquad \frac{g-f}{2x\,\text{Sin}\,\alpha} = \text{Sin}\,\pi;$$ his divisis inter se

fit $\text{tang}\,\pi = \frac{g-f}{g+f}\,\text{Cotang}\,\frac{A}{2}$.

§. 5.

Sint (Fig. 2) *E*, *F*, *D*, puncta contactus, per quae quaesitus circulus quartus transeat. Ibi ductis tangentibus, oritur triangulum *PQR*, quod problemati tactionum nostro manifeste prorsus Essentiale est, ideoque pro basi resolutionis adhiberi potest. Finge quartum circulum descriptum esse; is triangulum sibi circumscriptum *PQR* tanget in punctis *E*, *F*, *D*. Ergo (vitalis circumscriptionis) per Euclidem est *RD* $= RE$, $PD = PF$, $QE = QF$. Quaerendus est igitur apicis *R* *locus geometricus*, ex quo possint ad circulos *A* et *B* educi tangentes *aequales*; et consideratio quaevis levissima docet, hunc locum esse *rectam*. Hujus rectae nunc *positio* determinanda est. Ad superiores circulorum *A*, *B* partes duc tangentem *communem* ambobus, eandemque biseca; erit bisectionis punctum in quaesito *loco geometrico*. Nam ex hoc puncto tangentes *aequales* ad hos *A*, *B* circulos exeunt. Jam porro *infra* hos circulos communem tangentem duc, eamque bi-

seca; erit et *hoc* bisectionis punctum in quaesito *loco geometrico*. Ergo recta, quae per ambo bisectionis puncta transit, *quaesitus locus* est. — Similiter jam determinabis locos geometricos apicum P et Q. Atque sic ergo scimus, trianguli quaesiti apices P, Q, R, esse in *rectis positione datis*. — Pone nunc, harum rectarum duas QO, RO secare se in puncto O; ex hoc puncto, (cum situm sit in loco geometrico RQ,) tangentes *aequales* exeunt ad circulos A et B. Sed ex *eodem* puncto, quatenus porro situm est in rectâ QO, exeunt etiam tangentes aequales ad circulos B et C. Exeunt igitur ex puncto Q tangentes aequales ad *omnes tres datos circulos*. Inde sequitur pulcherrima *proprietas* hujus puncti, nempe tres rectas PO, QO, RO, secare se in uno *eodemque* puncto. Elige enim *aliam* rectarum harum bigam, verbi causa PQ et QO; secent se in puncto quodam V. Jam (per eadem, quae supra, ratiocinia) demonstrabis, exire ex V tangentes aequales ad *omnes tres datos circulos*. Existerent ergo *duo* puncta V et O, ex quibus tangentes aequales ad omnes tres datos circulos excurrerent; quod cum sit absurdum, ergo V et O unum *idemque* punctum sunt. — Atque sic sensim sensimque ad accuratiorem problematis tactionum cognitionem praeparamur, simulque patet, quam arcte cum illo cohaereat problema *praecedentis* paragraphi. Incidenter monemus, quod casu $m=n=r$, punctum O coincidat cum centro quaesiti *quarti* circuli; aliâs nunquam. — Attende nunc ad positionem rectae RO; transit nempe, ut vidimus, per bisectas communes tangentes circulorum A et B. Hinc levi ratiocinio assequimur, centralem rectam AB ab rectâ RO *normaliter* secari. Quare $\triangle RLT$ simile est triangulo BET; ideoque angulus $EBT=\theta$. At vero angulus EBT formatur â rectâ $AB=a$, et â rectâ BE, quae per centrum quaesiti *quarti* circuli transit; ergo est praecise unus *eorum* angulorum, quos in *primâ* et *secundâ* resolutione (§. 2 et 3)

ad calculum revocavimus. Ergo analysis trianguli *PQR* pulchre et naturâ suâ ad *istos* casus revocatur; sed *geometricam* illius trianguli constructionem, ex ipso rei fundamento infra suo loco indicabimus.

§. 6.

Rem eandem, contemplari sub *diversa* conceptu, habet plerumque suas utilitates, et nunquam forsan magis quam in praesenti problemate. Nam novus *conceptus* rei plerumque etiam ad pleniorem objecti *cognitionem* aliquid confert; quod vel ex praecedenti §. 5. confirmatur. Juvabit igitur, *sequentem* etiam indigitare methodum, determinandi id, quod *quaeritur*, per ea, quae *data* sunt. Sit (Fig. 1) in *O* puncto centrum quaesiti *quarti* circuli. Terminantur in *O* triangula tria T', T'', T''', quae conjunctim triangulum datum $ABC=T$ constituunt. Novisti regulam, quâ trianguli *area* per data trianguli *latera* exprimitur. Jam, (si radius quaesitus $=x$,) videbis, quod verbi causâ partiale triangulum T', respectu ipsius x exhibeatur per formam $T'=\sqrt{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}$. Et similiter pro ambobus *reliquis* triangulis partialibus, apparebit respectu ipsius x forma eadem. Scribe brevitatis causâ $T'=\sqrt{M}$, et sic deinceps. Ergo cum sit:

$T=T'+T''+T'''$, erit item:

$T=\sqrt{M}+\sqrt{N}+\sqrt{R}$.

Quae est ergo aequatio inter x et quantitates *datas*! Ascendet autem, (si more cossico illam rationalisare tentes,) ad potestatem quadraticâ longe altiorem respectu x; quod quidem ab ambiguitate signorum *radicalium* proficisci scimus. Ergo molestissimâ reductione ad gradum pro x *quadraticum* opus esset; quales autem perplexitates vel solâ Cogitatione perhorrescimus. Sed finge tamen reductionem hanc *factam* esse; tunc aequatio pro x finalis quadratica manifesto in suis coefficientibus continebit *literam* T. Quae observatio quanti *momenti* sit, et quam decisiva pro

algebraicâ problematis nostri resolutione, hoc lectores infra non sine aliqua admiratione pervidebunt, nec ergo illos pigebit, attentionem suam praevie ad hoc tam grave resolutionis elementum directam fuisse.

§. 7.

Symmetriam (supra §. 2.) *perire* dixi, quoties aliquis *cosinus* aut *sinus* in calculum ingrediatur. At si verbi causâ conjunctim Cos A, Cos B, Cos C introducantur, tum symmetria manifesto *conservabitur*. (Similiter et nec ingressu *literae* T turbatur symmetria, siquidem valor T est *per se* symmetricus, et lege prorsus aequabili per latera a, b, c exprimitur.) — Functiones autem symmetricae investigari possunt in aliis quoque Matheseos partibus; cujus rei aliquod saltim specimen, mutandi discursus causâ adferam. In quovis $\triangle ABC$ functio Sin A + Sin B + Sin C dicenda est *symmetrica*; ergo si ea forte *transmutationem* aliquam admittat, etiam transformata necessario fit symmetrica. Reperi autem, quod sit:

$$1.\ \text{Sin}\, A + \text{Sin}\, B + \text{Sin}\, C = 4\,\text{Cos}\,\frac{A}{2}\,\text{Cos}\,\frac{B}{2}\,\text{Cos}\,\frac{C}{2}$$

ubi utrinque manifesta Symmetria est, et exhibetur ergo *Summa* Symmetrica per *productum* symmetricum. Formula haec sponde abit in hanc alteram formam:

$$2.\ \text{Sin}\, A + \text{Sin}\, B + \text{Sin}\, C = 4\,\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}\,\text{Sin}\,\frac{A+C}{2}\,\text{Sin}\,\frac{B+C}{2}$$

Suspicor autem, in *omni* polygono summam sinuum esse transmutabilem in productum quodammodo symmetricum. Sic (Fig. 3) pro quadrangulo $ABCD$ reperi:

$$\text{Sin}\, A + \text{Sin}\, B + \text{Sin}\, C + \text{Sin}\, D = 4\,\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}\,\text{Sin}\,\frac{A+C}{2}\,\text{Sin}\,\frac{B+C}{2}.$$

in quâ deest angulus D, nempe praecise is, ad quem nulla linea complementi excurrit; ut figura docet. — Dantur au-

tem, casu trianguli, praeter istam (1) etiam aliae quaedam transformationes, quas hic uno obtutu complectar:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C.$$

Cujus rei forsan in sequentibus aliquis usus erit. Intuendo autem praecedentem ultimam, intelligimus, quod et *sic* scribi possit:

$$\sin^2 A - 2 \sin A \sin B \cos. C + \sin^2 B = \sin^2 C.$$

In quâ si fiat $\sin A = p$, $\sin B = q$, $\sin C = u$, ejus indoles sponte in oculos incurrit. Fit enim:

$$3.\ p^2 - 2pq \cos. C + q^2 = u^2.$$

Sed nec reliquae ambo difficulter demonstrantur. — Porro reperi (Fig. 3) pro quadrangulo $ABCD$ relationem angulorum hanc:

$$\sin A \sin C - \sin B \sin D = \sin (A + B) \sin (B + C);$$

quam pro *symmetricâ* agnosces, quatenus nempe ipsius figurae genius admittit. Ejusmodi relationes autem inserviunt iis, qui de Polygonometriâ solliciti sunt; cujus principale theorema sine dubio est id, quod formulae (3) analogum est, et verbi causâ (Fig. 4) pro quinquangulo $ABCDE$ ita sonat:

$$4.\ x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab \cos C + 2ac \cos (C + D)\ 2ad \cos (C + D + E).$$
$$- 2bc \cos D + 2bd \cos (E + D)$$
$$- 2cd \cos E$$

cujus legem, (si formulam cum figurâ comparas,) sponte detegis; et quae posito $c = o$, $d = o$, casum $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ relinquit. Istam formulam, (quae ultro ad *quodvis* polygonum extenditur,) geometris jam notam esse, nullus dubito. Sed addidi etiam *aream* polygoni, quae si ponatur $= P$, formula pro dicto pentagono ita sonat:

$$5.\ 2P = ab \sin C - ac \sin (C + D) + ad \sin (C + D + E).$$
$$+ bc \sin D - bd \sin (E + D)$$
$$+ cd \sin E$$

Hic pro $c=o$, $d=o$, relinquitur area trianguli, $2P=ab \operatorname{Sin} C$. At vero si polygonum *regulare* sit, id est $a=b=c=$ et cetera, et $A=B=C=$ et cetera,) tum praecedens aequatio abit in *hanc* formulam pro areâ regularis polygoni:

$$2P=a^2[(n-2)\operatorname{Sin} C-(n-3)\operatorname{Sin} 2C+(n-4)\operatorname{Sin} 3C-\ldots\ldots].$$

Aequatio *superior* (4) autem tunc abit in formam *hanc:*

$$\frac{n-2}{2}=(n-2)\operatorname{Cos} C-(n-3)\operatorname{Cos} 2C+(n-4)\operatorname{Cos} 3C-\ldots.$$

Sed ne nimis excurram, desinam nunc in eandem observationem, quâ exorsus sum. Nimirum si in formulam aliquam polygonometricam introducantur aequabili lege et conjunctim *omnes* ejusdem generis vel categoriae quantitates, tum formula eo ipso fit *symmetrica.* Hanc rem eleganti exemplo intuendam sistimus. Trianguli T latera sint $=a, b, c$; reperi aequationem hanc symmetricam:

$$T=\frac{abc}{a+b+c}.\ 2\operatorname{Cos}\frac{A}{2}\operatorname{Cos}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2}.$$

Quae formula exhibet et (specie insuetâ prorsus) trianguli *aream* per *omnes trianguli partes* expressam; et quia *omnes* angulos et *omnia* latera introduxi, eo *ipso* formula necessario facta est *symmetrica.* — Nunc ad rem redeo.

§. 8.

Ad ea, quae nunc sequuntur, probe attendat lector; siquidem ad penitiorem nostri problematis cognitionem et structuram pertinent. — Sit aliquod problema reductum ad locos duos *solidos*, quos ita scribo:

1. $y^2+\alpha xy+\beta x^2+\gamma y+\delta x+\epsilon=o$,

2. $y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=o$.

Ponamus verbi caussa, eas esse hyperbolas. Geometra jam curvas ambas seorsim *construet*, ut nempe *intersectionibus* quaesitis potiatur. Sed si y ex ambabus aequationibus eliminetur, ut prodeat:

3. $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=o$,

tum contingere potest, ut inter coëfficientes istarum (1. 2)

quaedam fortuita *relatio* vel *dependentia* existat, ita ut verbi causâ in biquadraticâ praecedente fortuito fiat et repetiatur $C=o$, $D=o$. Sic remanet ergo *quadratica*:

$$4.\quad x^2 - Ax + B = o,$$

quae utique locum solidum non requirit. Geometra igitur, si (hujus relationis ignarus) construxit praedictas *hyperbolas*, pro problemate *solido* tractavit et habuit, quod Elementare tamen seu *Planum* est; siquidem praecedens quadratica per circulum et *rectam* construitur. — Praecise hoc olim accidit *Adriano Romano*, qui nempe (Fig. 1) docuerat, „ex focis A, B, ope datae differentiae $AO-BO$ describatur *una* hyperbola, itemque ex focis A, C ope datae differentiae $AO-CO$ describatur *altera*; secabunt se in centro O circuli quarti quaesiti.“ — Usus est ergo *solidis* locis, cum tamen algebra subsistat intra *quadraticam*. Potest ergo problema aliquod pendere à locis, quorum uterque est *solidus*, et quod nihilominus constructionem *elementarem* admittit; *eliso* nempe forte fortunâ, quod solidum inerat.

§. 9.

His praemissis progrediamur jam ad resolutionem sequentem; sit (Fig. 5) $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$; radii ad A, B, C sint n, m, r respective. Circuli quaesitis O positio determinetur per *Coordinatas* $AE=x$, $EO=y$; sitque ejus radius $=u$. Conditio problematis una igitur est haec $AO=n+u$; sic enim intervallum horum ambo circulorum evadit $=o$, fitque *Tactio*. Dantur ergo *tres* aequationes:

$$1.\quad AO=n+u.\quad BO=m+u.\quad CO=r+u;$$

Quae tribus incognitis x, y, u sufficiunt. Pro ambo prioribus immediate habetur:

$$2.\quad \sqrt{(x^2+y^2)}=n+u.\quad 3.\quad \sqrt{[(c-x)^2+y^2]}=m+u.$$

Tertia $CO=r+u$ autem ex naturâ trianguli eliciendâ est. Est enim:

$$FO = DB - EB = a\,\text{Cos.}\,B - (c-x).$$

$$FC = a\,\text{Sin}\,B - y.\quad \text{Unde fit:}$$

4. $\sqrt{[(a \operatorname{Cos} B - c + x)^2 + (a \operatorname{Sin} B - y)^2]} = r + u.$

Ab his tribus (2. 3. 4) ergo tactionum problema, si ad coordinatas revocetur, pendet! — Hae tres attente si considerentur, patebit, quod in omnibus occurrant hi termini quadratici:

5. $x^2 + y^2 - u^2$;

ergo si horum trium terminorum *unum* elimines, eliminantur simul ambo *reliqui*. Et, (quod aeque decisivum est,) praeter hos $x^2 + y^2 - u^2$ restant non nisi *simplices* x, y, u, nempe nullum amplius neque *quadratum*, nec etiam *productum* duarum incognitarum remanet. Quod ut ipso facto pateat, loco istarum (2. 3. 4) ita scribimus, (attendendo, quod $a^2 - 2ac \operatorname{Cos} B + c^2 = b^2$):

6. $x^2 + y^2 - u^2 = n^2 + 2nu.$

7. $x^2 + y^2 - u^2 = m^2 - c^2 + 2mu + 2cx.$

8. $x^2 + y^2 - u^2 = r^2 - b^2 + 2ru + 2ay \operatorname{Sin} B + 2x(c - a \operatorname{Cos} B).$

Vides hic id, quod *decisivum* dixi, nempe ad dextram nonnisi *simplices* u, x, y, et *unius* tantum dimensionis occurrere. Ergo si harum aequationum duas aequabis, emerget aequatio, quae quoad x, y, u *linearis* vel *primae* tantum dimensionis est. Aequando verbi causa istas (6. 7), habebis:

9. $2(n - m)u = m^2 - n^2 - c^2 + 2cx.$

Aequando autem istas (6. 8), habebis:

10. $2(n - r)u = r^2 - n^2 - b^2 + 2ay \operatorname{Sin} B + 2x(c - a \operatorname{Cos} B).$

Quae sunt *lineares* ambo, ut dixi. Quodsi nunc u imponatur ex (9) in istam (6) vel (7), (nam prorsus idem resultat,) prodire videbis aequationem ad *hyperbolam*; eritque hyperbola haec focorum A et B, coordinatis $AE = x$ $EO = y$ ex ipso foco computatis. At si valorem u ex istâ (10) potius imponas, prodibit hyperbola *altera*, focorum nempe B et C; cujus autem aequatio paulo *complicatioris* formae erit, quoniam ad assumtas x et y coordinatas *oblique* posita est. Quemadmodum ergo hyperbolae se *Geometrae* quasi sponte obtrudunt, sic obtrudunt se solutioni

etiam *algebraicae*, et videtur igitur in hoc negotio extra hyperbolas nulla salus esse. — Videmus enim eas in problemate hoc *habitare* prorsus, et quasi domesticas esse. Cur ergo Vieta constructionem tamen *sine* illis peregit? Vel (quod idem est) cur algebra rem solâ *quadraticâ* conficit? Et quaenam est illarum curvarum quasi mysteriosa tamen *praesentia*? Quanam *proditione* circumveniuntur insontes hyperbolae, ut se de suo jure et sede ex improviso deturbatas et quasi rude donatas videant? Quo pacto fit, ut Vieta in actu constructionis nihil omnino de illarum praesentiâ usquam persentiat et videatur sibi problema *planum* resolvisse, quod origine suâ *solidum* est? — Hoc fit jam virtute eorum, quae supra *de iisdem* dixi. Quoniam nempe istae (9) et (10) *lineares* tantum existunt, ergo (ejectâ *u* ex ambabus) obtinetur *nova* linearis, inter solas *x* et *y*, nimirum haec:

$$11.\ 2a(n+m)y\ \mathrm{Sin}\ B = 2x[c(m-r) - a(m+n)\ \mathrm{Cos}\ B] + mc^2(n-r) + na^2(m+n) + r^3(m-n)$$

vel breviter scribendo

$$12.\quad My = Nx + R.$$

Atque sic ergo cernis phaenomenum singulare et prorsus insuetum! Nempe supra deductus est calculus per indispensabiles operationes ad duas *hyperbolas*, et ejus vi ista (12) tanquam *tertius* locus geometricus accedit, et quidem locus ad *rectam*! Vice alterius hyperbolae igitur adhiberi potest ista aequatio ad *rectam*, ideoque problema pendet jam ab intersectione *rectae* cum hyperbolâ. Sed quodcunque problema construitur ope *Hyperbolae* et Rectae, id construitur etiam ope *circuli* et rectae; hinc patet jam, quo pacto problema hoc elementarem seu *planam* constructionem admittat. Nempe dum uni hyperbolae recta substituebatur, alteri substitui potest jam *circulus*, ideoque elisâ *unâ* hyperbolâ, simul elisa est *altera*! Quare metaphysicum principium, quo mediante problema tactionum ex ca-

tegoria solida in planam transmigrat, penitus positum est in fortuita ista elisione unius *Hyperbolae*, interventu nempe coëxistentis istius aequationis ad *Rectam*. Hanc rectam non absurde *Parricidam* nominaveris, quia quasi *necat* matres hyperbolas, e quarum sinu prodiit; et harum curvarum ea, quae per istam rectam de sede mota est, etiam Sororem hyperbolam secum in ruinam vel saltim in exilium trahit.

§. 10.

Spectat huc insignis *Neutoni* locus (*Princ. Lib. I. Lemma* XXII.) „Quoties duae conicae obvenerint, quarum intersectione problema solvi potest, licet earum alterutram transmutare in *circulum Recta* item et sectio *conica*, in constructione planorum problematum; vertuntur in rectam et *circulum*." — Hyperbolis ambabus igitur uno *eodémque* actu occisis, constructio jam per *circulum et rectam* succedit, quod fecit *Vieta*. Simul patet etiam, quomodò *calculi* negotium jam optato modo procedat, et nempe consistat intra *quadraticam*. Connectes enim alterutram hyperbolam cum rectâ *parricidâ* $My = Nx + R$; hinc ejectâ *y*, necesse est prodire *quadraticam*.

§. 11.

Adrianus Romanus, Belga, eques auratus, quum tactionum problema auspicatus esset resolvere per hyperbolas, vituperium sibi meruit à *Franc. Vieta*, qui in praefatione ad Apollonium Gallum, „duplicavit cubum" (inquit) „per parabolas *Menechmus*, per conchoidem *Nicomedes*; an igitur cubus duplicatus est *geometrice*?" — Quod judicium per se nemo est, qui improbet. Ergo si in Vietam tamen hoc titulo *censuram* aliquam dirigam, res mihi probe ponderanda erit, et monendi *Lectores* etiam de circumspectiori suo judicio, praesertim (ut mox patebit) stante pro me *Isaaco Neutono*. — Laudandus erat Vieta, quod resolutionem per *elementa* adferret; sed praestandum illi hoc erat sine hyperbolarum *contemtu*. Sic enim factum est, ut hae (praeter

jus

jus et fas gentium) per integrum paene seculum *neglectae* jacuerunt, cum tamen Vietae elementaris resolutio debeatur *unice* istis contemtis *hyperbolis*. Rei successus enim *omnis*, ut vidimus, pendet ab interventu rectae istius *parricidae*; quae vero recta *non* adfuisset, nisi *prius* adfuissent *hyperbolae*, ex quarum amplexu mutuo manifeste *prodiit*, et quarum, ut ita dicam, ingrata *proles* est. Nam ambas matres ex nido deturbat, quemadmodum a *cuculo* narrant fieri. Res *ita* praecise, nec secus habet. — Quare *quantumcunque* beneficio istius rectae intervenientis triumphemus, agnoscenda est hyperbolarum saltem *Prioritas*. — Nam si problema *geometrice* tractes, in ipso quasi *limine* te salutabunt *hyperbolae*; sin rem ad coordinatas *algebraicas* revoces, ipso *calculo* necessitante incidis in easdem *hyperbolas*; quae ergo in problemate hoc fere dominantur, et quasi *Civitate* gaudent, ac (per causam distincte dictam) in ipso demum *Constructionis* actu quasi patiuntur *Eclipsin*. Videris tibi, (Vietae hinc respondeo,) rem tuam *sine* hyperbolarum adjumento egisse, quia eas non expresse *construxisti*, vel nusquam in Activitate vidisti, cum tamen Essentialiter problemati huic nuptae, et vel imo nescio et *inconsulto* te, tibique *invisae* suo munere defunctae sint. Inconspicuae tibi construenti manserunt, quoniam illarum complexui aliquid *inest*, propter quod ab expressa sui constructione te *dispensant*. — Opponis compositionem tuam per *elementa* factam; at vero positio unius non tollit positionem *Alterius*. Nam ut hyperbolis *careas*, causa est in *ipsis* hyperbolis; quippe quae cum ab *initio* jam testantur et quasi *clamant*, se praesentes et problema originaliter solidum esse, tamen vi suae Complexionis et ex *Coalitione* utriusque, degenerationem alterius admittunt in *Rectam*. Quo facto de hyperbolis *ambabus* actum est.“ — Hinc etiam paene difficile est dicere, ad quam praecise *Categoriam* problema hoc referendum sit; est quasi intermedium inter Geometriam *ele-*

mentarem et *solidam*, et quasi Mixtum seu Hermaphroditum. Nempe solidum *origine* sua, et planum *constructione*; et quidem prius Absolute; posterius autem per Accidens. Neque ergo eo sensu, quo cetera problemata, Elementariter solutum dici potest, et resolutiones ejus etiam *algebraicae*, quotquot existunt, existimandae sunt offerre non tam *quadraticam* aequationem, quam potius rudera *Biquadraticae*. (Sic supra §. 2. aequatiunculam $x^2 - Ax + B = o$, diximus quasi *ruinas* vel reliquias hujus *Completae*:

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o,$$

quae completa nempe, ob fortuitos $C = o$, $D = o$, quasi *Naufragium* passa est.) Ex his omnibus patet autem, quanto plus lucis per *praesentem* (§. 9.) resolutionem problemati huic adfundatur, quam per omnes eas, quae supra praemissae sunt.

§. 12.

Sed jam tempus est, ut *Neutonum* in scenam producam. Habet is (*Princ. Lib.* I. *Lemma* XVI.) problema. „A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas, quarum differentiae vel dantur vel nullae sunt.“ — Quod est praecise problema Tactionum. Neutonus jam *acceptâ*, (quae sponte obtruditur,) conditione hyperbolarum Adriani Romani, quaesitum punctum (inquit) locabitur in hyperbolarum *concursu*. In hoc ratiocinio *substiterat* olim Romanus, arbitratus, pro intersectionis puncto habendo salutem *nullam* esse, nisi in *constructione* ambarum curvarum. Habebat autem prae se *ordinarium* locorum geometricorum effectum et indolem, quippe qui vulgo problema *non* solvunt, nisi *constructi*. Hinc excusabilis est, quod â sola consideratione hyperbolarum posse transitum fieri ad elementarem constructionem non suspicatus est. At vero *Neutonus* pro ingenii magnitudine rem hanc subinde penetravit, et sumtâ unicâ proportione quâdam, adhibitâque ex conicis

competente proprietate *hyperbolae*, temporis jam articulo quaesitum punctum geometrice per *Euclidem* in potestate esse demonstravit. Idque sine omni reductione ad faciliores casus immediate pro tribus circulis datis praestitit! — A solida igitur problematis origine *exorsus*, in elementarem constructionem legitime *desiit*. Assecutus est ergo Neutonus *naturalem* hujus problematis indolem, siquidem is problema, quod naturâ suâ *mixtum* est, mixte *resolvit*, et hyperbolis, (quae intersectionis punctum *Sibi* vindicant, et *suâ* virtute partum contendunt,) honorem suum reservavit. — Manifesto igitur Neutonus *omissâ* resolutione Vietae, potius *Adriani Romani* vestigia pressit, nempe methodo, quam hic recte *inchoaverat*; ad elementarem constructionem usque recte *continuatâ*. — Finge nunc, Adriano, dum hyperbolas â Vieta damnatas experiretur, adstitisse vel praesto fuisse *Neutonum*. Is certe *Macte* esse Adrianum, *salvamque* rem esse monuisset, *eumque* certiorem fecisset, quod actuali hyperbolarum constructione *supersederi* possit. Quodsi Adrianus jam resolutionem hanc (â Neutono nempe ad finem elementarem perductam) Parisios misisset, an Vieta vel *tum* quoque hyperbolarum in hac ne servitium operamque damnaturus erat? — Vix ita videtur. — Imo vero credibile est, Vietam Neutoni solutione visâ *admiratorem* potius resolutionis hostilis futurum, et potius *ipsum* Herbipolin profecturum fuisse, quam vice versâ ita factum esse penes Thuanum legimus. Quare Vieta, (utut egregie de Geometria meruisse censendus est,) videtur tamen hic admisisse quandam ignorationem Elenchi, et â vera problematis Metaphysica aliquantum aberrasse, siquidem Adriano Romano exprobravit ipsum resolutionis *genus*; quod erat (evincente Neutono) longe justissimum. Hinc etiam nec prius quam sub *Neutoni* auspiciis oppressae hyperbolae ad pristinos honores emerserunt.

§. 13.

Lectores forsan videbuntur sibi nunc *scire* causam, propter quam problema hoc ex categoria solida in elementarem transmigret; nempe ob interventum istius *rectae*, quae se juxta hyperbolas intrudit et inserit. — At vero fallimur, si id causam esse existimemus; nam ista recta est, ut ita dicam, res *Facit*, sed non est *Causa* phaenomeni. Quum enim dentur *mille* problemata solida, cur expresse in *tactionum* problemate talis recta intervenit? Cur non in *aliis*, cur non in *quolibet* problemate solido idem contingit? Hoc reputa; nam res habet aliquid in recessu. Et occurrit hic res jucundissima sane, et quae *rationem* reddit, cur hic fiat Solidorum Elementari quasi *Amalgama*. Praesto sunt (Fig. 1) duo hyperbolae, altera ex focis A, B, altera ex focis A, C describenda. Earum singula habet peculiarem suam *focorum* distantiam, nempe prior istam $AB = a$, posterior istam $AC = b$. Item singula habet peculiarem suum *axem majorem*, prior hunc $= n - m$, posterior hunc $= n - r$. Sic ergo hae duo curvae videntur *universales*, hoc est, inter se prorsus *independentes* esse. Nam singula habet, possessione quasi privatâ, suam *focalem* distantiam, et item peculiarem suum *axin majorem*. Quibus duobus curva utraque per se universaliter et independenter determinari videtur, ita ut neutri cum alterâ aliquid commercii esse videatur. — At vero nunc latus *tertium* superest $BC = c$, quae est focalis distantia hyperbolae *tertiae*, habentis axin majorem $= BO - CO = m - r$. Hae tres hyperbolae igitur tenore ac modo prorsus *pari* inter se dispositae et constitutae sunt; siquidem singula habet suam competentem *focalem* distantiam, et singula etiam competentem suum axin *majorem*, lege prorsus *aequabili* determinatum ex datis nempe radiorum vectorum *differentiis*. Hae tres curvae prae se ferunt genesin *similem* perfecteque *Symmetricam*.

Ergo si primam et *secundam* inter se independentes

esse pronuncias, pronunciabis idem de primâ ac *tertiâ*, et pronunciabis idem etiam de *secundâ* ac tertiâ, eruntque sic *omnes* tres independentes inter se. Quod sane de *focalibus* distantiis a, b, c indubie et manifesto *verum* est. At vero si *axes* consideras, tum perelegans et paene ridicula se prodit *illusio*. Nempe si axes majores hi dicantur $A, B, C,$ ante oculos habentur valores:

$$n - m = A.$$
$$m - r = B.$$
$$n - r = C.$$

Ex his jam duos alterutros m, n quaeso *elimina*, tum differentiarum talium ultro persenties *indolem*; fit nempe:

$$A + B = C.$$

Et sic ergo nunc *ipse* judica, num hi axes tres $A, B, C,$ inter se sint *independentes*!!

§. 14.

Demonstratâ hâc arithmeticâ axium inter se dependentiâ explicabimus jam porro *geometricam* etiam hyperbolarum istarum constitutionem, et quidem praecise *restrictionem* illarum geometricam; quod quidem veram problematis tactionum quasi Metaphysicam spectat. — Binae quaevis hyperbolae, (vel omnino binae *conicae* quaevis) generaliter censendae sunt esse ut ita dicam, roboris ac virtutis Biquadraticae, ob quatuor nempe *intersectiones*, quae dantur, ideoque eliminatio ordinatae y ex ambabus aequationibus producit aequationem generaliter loquendo *Biquadraticam*. At jam intueamur conditionem et legem, quâ *nostrarum* hyperbolarum binae descriptae sunt. Altera focos habet A et B, altera focos A et C; ideoque circa alterum A focum *communem* descriptae sunt, eumque *participant*. Sed quaecunque duo conicae descriptae sunt circa focum alterutrum *communem*, eae secare se mutuo nequeunt in pluribus punctis, quam in *duobus*. (Cujus asserti demonstrationem, quae variis modis iniri potest, brevitatis causa

omittimus; in rei Exemplum tamen adscripsi Figuram 6.) — Ergo conicae duae ad communem focum restrictae, dimidiâ parte *impotentes* quasi fiunt, sive Eunuchae, et quidquid biquadratici roboris infuit, restrictione illâ *amittunt*. Hinc impossibile est, per conicas tales eidem foco alligatas construere aequationem altiorem quam est *quadratica!* Et vice versâ igitur, quodcunque problema construendum occurrit per ellipses duas (vel duas hyperbolas) communi *foco* obnoxias, id aequipollere censendum est *elementari* problemati, siquidem tales restrictae conicae non sunt majoris potentiae sive roboris quam *circulus et recta.* — Quo ipso efficitur, ut problema tactionum quasi *Mixtum* sive *Amphibium* sit.

§. 15.

Neutonus (*Princ.* L. I. *Sect.* 9.) de motu *absidum* agit; ubi nimirum aux (motu tardissimo) ellipsin totam circa focum alterum devehit. Ergo theorema (§. 14.) memoratum occurrit in *Physicis*; nempe habentur Ellipses, quasi innumerae, altero foco *immobili* sex *communi* gaudentes. Et corpus in tali mobili ellipsi delatum, censendum est versari quovis momento in intersectione ellipseos proxime *antecedentis*, et proxime *consequentis*. — Et porro cum *omnes* planetae cometaeque circa solem tanquam focum fixum feruntur, hinc eorum *omnes* orbitae inter se sunt in isto, quem supra designavi, *impotentiae* statu; ergo si quis cometa vel maxime telluris orbitam *secare* ponatur, secabit illam saltim in punctis tantum *duobus*, non *quatuor*. Unde metus a Cometis oriundus duplo minuitur, idque beneficio theorematis nostri de communione *focorum*. Quae est non inelegans observatio Cosmologica. — Tandem hoc loco monendum est, quod hyperbolae duo, (vel duo ellipses) possint *ambos* etiam focos communes habere, tum vero *penitus* impotentes evadunt, et *nulla* penitus intersectio datur. Exempli instar sit Fig. 7. — Tales binae non sunt *similes*;

(quod per se patet,) nec etiam sunt *aequidistantes*, (quales curvas Leibnitius *parallelas* dixit,) sed sunt *Concentricae*; quae est earum vera denominatio. Habentque inter se memorabiles proprietates varias; quibus autem nil immoror.

§. 16.

Jam tandem ad problematis nostri tractationem geometricam *elementarem* transimus; priusquam autem progrediamur, Vieta, vir optimus, graviter iterum carpendus et obtrectandus est. — Sint radii tres dati $= m, n, r$, sitque r minimus, et quaeratur contactus ad *convexitatem* quarti circuli quaesiti; statuit jam Vieta, circuli quarti quaesiti radium continuo *crescere*, donec per *centrum* circuli minimi transeat; sic ergo transibit per *punctum* datum, atque circulos datos radiorum $m - r$ et $n - r$ *continget*. Revocatum est ergo problema ad casum, quo *duo circuli* cum *puncto* dati sunt; et recte quidem habet. Sed finge nunc, circulum quartum, dum per centrum illud transit, *porro* adhuc excrescere; sic ergo centrum circuli dati minimi nunc *intra* quartum quaesitum cadet, et radius r, qui evanuerat, ex *oppositâ* parte quasi *resuscitatur* iterum, et nanciscitur magnitudinem quandam $= u$. Hac operatione igitur circuli tres dati radios nacti sunt hos:

$$m - r - u.$$
$$n - r - u.$$
$$u.$$

Aequando hic verbi causa radium primum cum tertio, fit $u = \frac{m \cdot r}{2}$. Ergo effici semper et immediate potest, ut aliqui duo circulorum datorum *aequales* fiant! Reductum est nempe problema ad casum, quo dati tres circuli sunt, quorum duo *aequales* existunt. Vieta igitur ex duobus aeque gravibus reductionis modis unum in *medium* attulit, alterum *neglexit*; ideoque rem ex dimidiâ parte *imperfectam* reliquit. Quo factum est, ut Vieta *alias* quoque ingentes

viros in errorem secum deduceret, quippe qui casum, ubi duo saltim circuli aequales existunt, pro *specialiori* haberent quam eum casum, ubi *omnes* tres inaequales. Sic *Hospitalius* (Sections coniques. p. 374 seqq.) casum generalem circulorum inaequalium *aerumnoso* sane labore reducit ad casum tandem tandemque, quo duo circuli *aequales* existunt. An tale quid in *mentem* illi venisset, si sibi de immediatâ casuum horum indentitate constitisset? — At vero Vieta ipsum, Neutonum quoque sic fefellit. Quippe qui (Princ. I. Lemmate XVI supra commemorato §. 12.) expresse casus *tres* diversos distinguit, nempe si circuli dati *omnes* inaequales; secundo si saltim *duo* aequales, tertio si *omnes tres* aequales existant; et cum horum casuum *secundus ac tertius* omnino realiter diversi sint, sic etiam casum primum et *secundum* pro realiter diversis habuit. Sed hi ambo sunt, ut vidimus, unum *idemque* problema, ideoque Neutonum pulchre apud me deridebam. Cum enim in vulgari algebra (propositis tribus quantitatibus quibuscunque m, n, r,) casus $m=n$ *specialior*, casusque $m=n=r$ *specialissimus* censendus sit, e contrario in tactionum problemate casus $m=n$ generali casu *nihil* deterior seu specialior esse demonstratus a nobis est. — Summa rei est autem, quod problema hoc tactionum, enunciatione generali prorsus *careat*, sed (enunciatione generali de *diversis* m n, r factâ,) subinde et ultro ad casum specialem seu *reductum* rebibatur; nempe vel ad casum reductum $r=o$, qui est *Vietae*, vel ad casum $m=r$, qui est *Noster*. At vero demonstrabimus jam, has *ambas* reductiones, (tum unam, tum alteram) in genuinâ resolutione ne in *censum* quidem venire, et penitus esse *omittendas*. Imo vero ista Vietae reductio, genuinae problematis hujus resolutioni quasi pestilentialis exstitit. — Nam reductione istâ ad casum $r=o$, manifesto periit *Symmetria* ista problematis, quam supra (§. 2.) diximus in *algebraicâ* solutione, et hinc multo ma-

gis in *geometricâ* quoque esse *conservandam*; quâ laesâ igitur, problematis hujus decor, harmonia et majestas fere perit. Hinc resolutio immediate pro tribus circulis *inaequalibus* exhibenda est, et quae nunc sequuntur, ea in vindicias tituli, quem libellus hic gerit, conscripta sunt.

§. 17.

Apollonii *Lemmata*, quibus hic in suis tactionum libris usus erat, consecvata sunt â *Pappo* in Collectaneis mathematicis; et horum lemmatum fere 24 sunt. In his continetur (Fig. 8.) inprimis *hoc* theorema, quod recta *MN* per contactum *A* duorum circulorum transiens, ambos circulos *proportionaliter* secet, fiatque angulus $B = C$. Quo theoremate problema nostrum, ut mox patebit, quasi *totum situ* censendum est. Sed in istis lemmatibus porro continentur celebria quaedam duo *problemata*, per quae nempe Apollonius actualem problematis tactionum *constructionem* absolverat. Haec ambo problemata sic habent:

I. (Fig. 9.) Ex datis *A*, *B* punctis ad circulum datum inclinare duas rectas *AC*, *BC*, ita, ut *MN* et *AB* fiant *parallelae*.

II. (Fig. 10) Datis in rectâ punctis *A*, *B*, *C*, inclinare ad circulum datum rectas *AO*, *BO*, ita, ut recta *MN* (producta, si opus est,) per punctum tertium *C* transeat.

Horum problematum posterius facile ad *prius* reducitur. — Ceterum ad haec duo tanquam *cardinalia Lemmata* suo tempore provocabimus; quare Lectores eorum sensum et materiam interim probe memoriae imprimant. — Jamque paucis verbis rem totam narrabimus.

§. 18.

Intuere Fig. 11; in quâ circulus *O* est quartus quaesitus; agnosce *Symmetriam* systematis, quod ante oculos est. Nam venustas harmonica manifesto *peribit*, si circulorum datorum alteri, ex Vietae praeceptis *punctum* substituas. Nunc rem *ipsam* considera. Duxi rectas per puncta conta

ctus *A*, *B*, *C*. Has rectas utrinque produxi; quo facto figura tota sponte in statum, qui ante oculos versatur, suppletur, et oriuntur triangula *quatuor*. Contemplare nunc circulos *P* et *O*. Hi secantur in puncto contactus *A*, idque a *duabus* rectis; hae duo rectae (vi praedicti §. 17 theorematis de sectione proportionali) ambos circulos in segmenta *similia* divident, et videbis hinc, fieri eos angulos aequales, quos figura tanquam tales *exhibet*. Erunt ergo triangula *P* et *O similia*. Sed eodem argumento prorsus evincitur, etiam triangula *Q* et *O*, itemque triangula *R* et *O* esse similia. Habemus ergo jam triangula *P*, *Q*, *R*, *similia*, et similiter *posita*, sicut symmetria, quam intendimus, postulat. Et sunt similia quoque *quarto* triangulo *O*, quod quartum vero ex naturâ rei positionem habet *inversam*. — Postquam autem figuram hanc lectori ostendimus, jam ad reliqua pergimus.

§. 19.

Sequitur Fig. 12; quâ totum negotium absolvitur. — Elige circulos *A* et *B*; per eorum centra duc et produc rectam, quoad satis est. Ad eosdem circulos duc *tangentem communem*; ea converget cum rectâ praedictâ in aliquo puncto *Q*. Tale punctum convergentiae igitur pro quibuscunque binis circulis articulo temporis in promtu erit. Quaere ergo convergentiae punctum *P* pro circulis quoque *B* et *C*, et quaere denique convergentiae punctum *R* pro circulis etiam *A* et *C*. Sic ergo pro quibuscunque tribus *circulis* datis, inveniuntur etiam competentia tria puncta *convergentiae*. — Accipe nunc totam rem. Haec tria convergentiae puncta *P*, *Q*, *R*. semper jacent in *directum*, vel in *unâ eademque rectâ!* — Prinsquam autem pulcherrimi hujus theorematis ope, constructionem *symmetricam* ad finem perducam, necesse omnino est, illud legitima *demonstratione* confirmare, tum propter novitatem theorematis, tum quia constructio prorsus in illo nititur. Ergo candide indicabi-

mum, quo pacto in illud inciderim; praesertim cum ipsa quoque Demonstratio venustam suam *Symmetriam* habeat. (Potes autem theorema hoc facilime *exemplis* etiam tot, quot lubet, a *posteriori* confirmare.) — Cum reputarem nempe, quod per puncta A, B, C, determinentur quidem circulorum *centra*, sed non radiorum *magnitudines*, ideoque rectas triangulum ABC constituentes prorsus independentes esse à radiis m, n, r, incidi subinde in considerationem punctorum *convergentiae*, quae puncta nempe longe *majoris* efficaciae fore sperabam, siquidem ad ea determinanda manifesto ab *omnibus* datis a, b, c, m, n, r concurritur. Considerare ergo coepi triangulum PQR, (quod nempe â punctis convergentiae oriri praesumebam,) et cum hujus trianguli proprietates valde *characteristicas* itemque *symmetricas* fore praeviderem, operam dedi, ut illas detegerem. Posito ergo $PQ = A$, et $QR = B$, et latere tertio PR, (quod nempe angulum oppositum Q subtendere praesumebam), posito $= C$, quaesivi hujus praesumpti trianguli *aream*. Hanc aream autem non sine admiratione reperi esse $= o$, siquidem omnes termini mutuo se *destruebant*. Hinc didici, *nullum* tale ΔPQR dari, ideoque puncta P, Q, R posita esse in *directum*. Adhibui porro theorema vulgare:

$$1.\quad A^2 - 2A.B.\text{Cos}\,Q + B^2 = C^2$$

et reperi esse $\text{Cos}\,Q = 1$, unde $Q = 180°$, hoc est, puncta P, Q, R, esse in directum; ut supra. Quod ut ipso jam *actu* pateat, in aequatione praecedente literas A, B, C, per suos competentes valores exprimam.

§. 20.

Inchoemus â convergentiae puncto P; situm est hoc punctum in rectâ BC productâ, et quidem in concursu ejus cum *tangente communi* horum ambo circulorum. Per punctum B duc rectam tangenti communi huic parallelam. Estque ut hactenus, $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$; et circulorum

radii $= m, n, r$, quemadmodum figurae 12 adscriptum vides. Jam sponte patet proportio:

1.) $r - m : c = m : BP$; hinc $BP = \frac{mc}{r-m}$.

Huic valori BP adde $BC = c$, ut fiat $BP + BC = PC = \frac{rc}{r-m}$.

Similiter jam procedes cum linea convergente AQ; et similiter denique cum linea convergente AR. Sic ante oculos erunt sequentes valores:

$$BP = \frac{mc}{r-m}.\quad BQ = \frac{ma}{n-m}.\quad CR = \frac{rb}{n-r}.$$
$$CP = \frac{rc}{r-m}.\quad AQ = \frac{na}{n-m}.\quad AR = \frac{nb}{n-r}. \qquad 2.)$$

Ex triangulo PBQ habetur:

3. $BP^2 - 2\,BP.BQ.\mathrm{Cos}\,B + BQ^2 = PQ^2$.

Similiter pro triangulo AQR habetur:

4. $AQ^2 - 2\,AQ.AR.\mathrm{Cos}\,A + AR^2 = QR^2$.

Similiter tandem pro triangulo PCR, (quod continet angulum $180^\circ - C$, hinc $\mathrm{Cos}\,(180^\circ - C) = -\mathrm{Cos}\,C$,) habetur:

5. $CP^2 + 2\,CP.CR.\mathrm{Cos}\,C + CR^2 = PR^2$.

In his tribus aequationibus (3. 4. 5.) jam substitue praedictos valores (2); substitue porro valores $PQ = A$, $QR = B$, $PR = C$. Et cum in triangulo ABC sit $a^2 - 2ab\,\mathrm{Cos}\,A + b^2 = c^2$, (atque similiter pro duobus *reliquis* angulis B et C,) hinc etiam *cosinus* omnes ex istis (3. 4. 5.) exterminantur; sic loco trium harum aequationum, levissimâ operâ, nanciscere respective has novas tres:

$$6.\ aa(r-m)(r-n) + bb(m-r)(m-n) + cc(n-m)(n-r) = \frac{(r-m)^2(n-m)^2 AA}{m^2}.$$

$$7.\ aa(r-m)(r-n) + bb(m-r)(m-n) + cc(n-m)(n-r) = \frac{(n-r)^2(n-m)^2 .BB}{n^2}.$$

$$8.\ aa(r-m)(r-n) + bb(m-r)(m-n) + cc(n-m)(n-r) = \frac{(r-m)^2(n-r)^2 CC}{r^2}.$$

Ecce mirabilem harum trium aequationum naturam; ad sinistram partem pro omnibus valor *idem* est, isque simul

Symmetricus! Jam ergo pro hâc sinistrâ parte ponatur, Φ^2, et habebis loco harum trium aequationum ultro has novas et simplicissimas:

$$9. \quad A = \frac{m\Phi}{(r-m)(n-m)},$$

$$10. \quad B = \frac{n\Phi}{(n-r)(n-m)},$$

$$11. \quad C = \frac{r\Phi}{(r-m)(n-r)}.$$

Hos valores jam substitue in aequatione suprâ memoratâ:

$$A^2 - 2A.B.\mathrm{Cos}\,Q + B^2 = C^2,$$

(quae nempe ad praesumtivum triangulum PQR spectat;) et videbis, literam Φ ex calculo prorsus evanescere, ut fiat:

$$(r-m)(r-n)(1+\mathrm{Cos}\,Q) = o.$$

Ergo $\mathrm{Cos}\,Q = -1$, hoc est $Q = 180^0$, ut supra dixi. — Quod erat demonstrandum. Et actualiter patet ex istis (9. 10. 11.), esse omnino:

$$A + B = C.$$

Praecedentem theorematis nostri demonstrationem expresse *praetuli* demonstrationi pure geometricae; volui enim hâc occasione praegustum symmetriae *algebraicae* dare. Sed geometrica nostri theorematis demonstratio non minus elegans est; nunc illâ supersedemus.

§. 21.

Vi demonstrati ergo scimus jam, quod quorumvis datorum trium circulorum puncta convergentiae P, Q, R, jacent in *directum*. Quare theoremate hoc nunc utemur et fruemur, quantum lubet. — Ceterum ex convergentiae puncto P, ambo circuli competentes *proportionaliter* semper secantur; verbi causâ si (Fig. 12.) recta PL ducatur, erit angulus OBH = angulo KCL. Quae puncti convergentis proprietas jam â Vietâ, et nisi fallor, jam ab *Archimede* demonstratur; estque res vel imo tironi demonstrabilis, Quare

proprietatem hanc sumo tanquam notam, sive Lemmatis instar. Vice versâ si recta *OL* secet ambos circulos *proportionaliter*, tum transit haec recta per convergentiae punctum *P*. Nam situm est punctum *P* in lineâ centrali productâ *BC*; ergo si recta *OL* non per punctum *P* transeat, secabit lineam centralem in *alio* quodam puncto *V*, quod â puncto *P diversum* foret. Hinc in rectâ centrali *BC* existerent puncta *duo P* et *V*, ex quibus circuli proportionaliter secentur; quod est absurdum. Res ergo breviter sic habet. Ex convergentiae puncto *P* excurrit ad ambos circulos tangens communis *una*, itemque tangens communis *altera*; inter ambas tangentes communes has, circuli *B* et *C* dati penitus interjacent. Quaecunque nunc *tertia* recta *PL* ex puncto *P* educitur, ea circulos *proportionaliter* secat; earumque rectarum secantium *intermedia* est recta centralis *PC*, quae nempe circulos *bisecat*. Sic jam claram atque distinctam punctorum convergentiae cognitionem habemus. Pro datis jam *tribus* circulis dantur, ut vidimus, *tria* puncta convergentiae, et jacebunt haec tria puncta in directum. Sic oritur ergo una eademque recta *PR*, cujus data sunt puncta extrema *P* et *R*, datumque punctum alicubi intermedium *Q*. Haec *PR* ergo est recta *data*, conflata ex duabus rectis datis *PQ* et *QR*; et (propter decisivam suam *efficaciam*) haec recta *PR* in posterum dicetur *parameter* problematis Apolloniani. Redeamus nunc ad Fig. 11; nam in eo sumus, ut symmetricae hujus figurae naturam longe *clarius* jam exponamus, quam id supra §. 18 fieri potuit. Mente repetes autem, quae ibi demonstrata sunt; nempe externa tria triangula *P*, *Q*, *R* esse *similia*, et similiter *posita*, et similia quoque *quarto* triangulo *O*. Hoc triangulum *O* nunc intueamur. Ejus latus *AB* circulos *P* et *Q* secat *proportionaliter*, ergo transit hoc latus per horum circulorum punctum *convergentiae*; (et productâ centrali lineâ *PQ*, habetur hoc punctum *ipsum*, nempe in concursu

tum proportionaliter secante *AB*.) Similiter porro latus *BC* proportionaliter secat circulos *Q* et *R*, ergo hoc latus productum transit per punctum *convergentiae* horum circulorum, et cum centrali productâ *QR* concurret in ipso hoc puncto convergentiae. Et similiter jam tandem se habet cum latere tertio *AC* et competentibus circulis *P* et *R*. Intelligis jam, quid haec sibi velint; nempe recta centralis *PQ* cum proportionaliter secante *AB* constituunt convergentiae punctum *unum*; et centralis *QR* cum proportionaliter secante *BC* constituunt convergentiae punctum *secundum*, et centralis *PR* cum proportionaliter secante *AC* constituunt convergentiae punctum *tertium*. Quum autem haec puncta tria in *directum* jaceant, ergo centrales tres *PQ*, *PR*, *QR*, et proportionaliter secantes tres *AB*, *AC*, *BC* ex *eâdem* rectâ, nempe ex *parametro* exeunt. Quod clarius jam in Fig. 12, (ad quam nunc revertimur,) in oculos cadit, quoniam ibi parameter conspicua ac *delineata* est.

§. 22.

Nunc ac actualem problematis Apolloniani resolutionem venimus. — Dati sint (Fig. 12) circuli tres *A*, *B*, *C*, qui â quarto circulo contingendi sint. Ope communium tangentium defige datorum circulorum punctâ convergentiae *P*, *Q*, *R*. Jacebunt haec puncta in directum. — Sint jam quaesita puncta contactus *E*, *H*, *K*; junge rectas *EH*, *EK*, *HK*, easque utrinque produc intra datos tres circulos, et sponte sic oriuntur ista tria triangula *similia* et similiter *posita*, datisque tribus circulis inscripta. Recta *HK*, proportionaliter secans circulos *B* et *C*, dirigitur in illorum convergentiae punctum *P*, et (simili de causa) recta *EH* tendet ad punctum *Q* convergentiae circulorum *A* et *B*; itemque recta *EK* tendet ad punctum convergentiae tertium *R*. Produc *OF*, donec parametrum secet in *M*; et produc *LG*, donec parametrum secet in *N*. Jam lineae, quas figura exhibet, omnes ductae sunt. — Ob *OF* et *KG* parallelas fit:

$PO : PK = PM : PR.$

Sed ob circulos ex puncto P proportionaliter sectos est:

$PO : PK = m : r.$ Ergo:

$PM : PR = m : r.$

Ergo (ob datam PR) data est recta PM, datumque punctum M. Porro ob rectas HF et LG parallelas fit:

$PH : PL = PQ : PN.$

Sed ob circulos ex puncto P proportionaliter sectos, fit:

$PH : PL = m : r.$ Ergo:

$PQ : PN = m : r.$

Ergo (ob datam PQ) data est recta PN, datumque punctum N. Sic ergo in parametro data sunt quinque puncta P, Q, R, M, N. Elige nunc circulum verbi causa minimum B. — Ad hunc ergo, ex punctis datis Q, M, inclinare oportet rectas QF, MF, ita, ut (lineis intra circulum continuatis) recta HO per datum punctum P transeat! Et sic ergo constructio reducta est immediate et praecise ad Lemma *cardinale Apollonii* (§. 17)! — Invento jam (hujus lemmatis ope) puncto F, manifeste habentur omnia puncta quaesita H, K, E. Quod erat demonstrandum. — Finge nunc circulos B et C *aequales* fieri; tum illorum convergentiae punctum P ad sinistram recedet *in infinitum*, ergo OH fit parametro QR *parallela*. Ergo tunc à datis punctis Q, M, ad F inclinandae sunt rectae QF, MF ita, ut OH isti QM *parallela* fiat. Quod est praecise (§. 17.) Lemmatum cardinalium *Alterum*! Ergo cum supra (§. 16) demonstraverim, quod *salvâ* universalitate problematis, duo circuli dati semper *aequales* assumi possint, hinc patet, quod per haec duo lemmata cardinalia Apollonii problema prorsus quasi exhauriatur, siquidem lemmate opus est vel *uno* vel *altero*, prouti circulos tres datos *inaequales*, vel duos eorum *aequales* ponas. — Ex hâc problematis generalis resolutione virtus parametri sane manifesta est! — (Puncta M, N, determinavi supra ex proportionali

sectio-

sectione *PL*; sed possunt prorsus eodem modo determinari etiam ex proportionali sectione *QS* circulorum *A* et *B*, itemque ex proportionali sectione *RD*, circulorum *A* et *C*. Quae observatio facit ad *Symmetriam* operationum clarius perspiciendam.)

§. 23.

Sed haec Symmetria longe magis patebit e sequentibus: Quaesito triangulo *HEK* *simile* esse triangulum *OFH*, dudum vidimus. Ergo hoc $\triangle OFH$ jam *per se* naturam problematis totam in se complectitur, ita ut resolutionem non modo ad *punctum F* dirigere possis, (ut supra feci;) sed similiter ad puncta quoque *O* et *H*. Habes enim inter haec tria problemata electionem quasi *Symmetricam*: I. Ex datis punctis *Q* et *M* inclinare rectas ad *F*, ita ut *HO* per punctum datum *P* transeat; *II*. Ex datis punctis *P* et *M* inclinare restas ad *O*, ita ut *HF* per punctum datum *Q* transeat; *III*. Ex datis punctis *P* et *Q* inclinare rectas ad *H*, ita ut *OF* per punctum datum *M* transeat! — Atque haec est ergo *Symmetria* illa problematis, secundum quam dixi dirigendas esse operationes non ad *unum* quaesitum punctum, sed ad universum systematis *totius* complexum, quasi Harmonice. — Similiter in symmetriae vindicias necesse est observare, quod non modo pro circulo *minimo B* talis resolutionum trias existat, sed etiam similiter pro quovis *reliquorum* circulorum *A* et *C*. Verbi causa pro circulo *C* inclinabis ab *N* et *R* ad *G*, vel ab *P* et *R* ad *K*, vel ab *P* et *N* ad *L*. Quod autem circulum tertium *A* attinet, necesse est (per naturam dati Systematis circulorum) per punctum *A* ducere rectam *AT*, parallelam rectae *BC*; deinde producenda est parameter ad sinistram, donec rectam istam *AT* in puncto *T* secet. Figura nostra 12 tantam longitudinem non capit; sed facile per id eam hoc punctum *T* nobis repraesentamus. Jam ergo inclinabis â *Q* et *R* ad *E*, vel â *T* et Q ad *S*; vel tandem â *T* et R ad *D*. Pluribus

hanc rem explicare piget, siquidem symmetricæ resolutionis fundamentum semel explicuimus. Oriuntur ergo sic solutiones $3 \cdot 3 = 9$, siquidem symmetria singulum *circulum* datum ad constructionem destinat, et singulo circulo tres apices *trianguli* inscripti considerandi sunt; quod inscriptum triangulum vidimus esse simile triangulo quarto *EHK*, quod nempe *quaesito* circulo inscriptum est.

§. 24.

Sic ergo (§. 22—23.) nunc primum exhibita est resolutio pro tribus immediate circulis inaequalibus, ideoque resolutio, quam efflagitat problema, *symmetrica*, vidimusque rem totam niti *parametro* problematis. Qui rem accurate perpendit, intelliget, imperfectionem, quâ Vietæ solutio laborat, unice ac penitus ab ignoratione parametri fluere. Sic enim non modo Symmetria illi intercidit, sed et coactus fuit, resolutione prorsus *indirectâ* contentus esse. Reducit enim casum trium circulorum ad casum *duorum* cum *puncto* dato, deinde *hunc* porro casum reducit ad casum unius circuli cum punctis *duobus* datis; et *sic* tandem tandemque ad finem optatum pervenit. Quum autem parametri existentiam semel *ignoraret*, ex alterâ parte fatendum est, quod rem expediverit omnino tam eleganter, quam sine parametro possibile fuit. Et lubens etiam fateor, (quod ex ipsâ demonstratione §phi 20. liquet,) me in parametri hujus cognitionem solo casu et Felicitate quâdam pervenisse. Sed (quod non satis mirari possum, et salvo tamen meliori judicio profero,) ipse quoque *Apollonius* hanc parametri lineam ignoravisse videtur! — Quomodo fit enim, ut Pappus, (qui lemmatum totum quasi *exercitum* ex Apollonii tactionum libris in sua collectanea transtulit,) expresse tamen *hujus* lemmatis, „quod puncta tria convergentiæ in directum jaceant" non *mentionem* faciat, adeo ut illius ne *vestigium* quidem aut *suspicio* in istis 24 lemmatibus deprehendatur? — Debebat sane *mente* captus esse Pappus, si lemma

hoc præcise, quod quasi Arx et *Castellum* et genuinæ resolutionis *Hypomochlium* est, per negligentiam omisisset; et palam est, nos facilius istis *viginti* lemmatibus carituros fuisse, quam hoc solo parametri lemmate. Nam si de hoc *solo* posteritatem commonuisset, Geometræ ex hâc indigitatione *dudum* resolutionem genuinam et symmetricam exhibituri erant, nec sane ea rès præsentem hanc nostram operam exspectavisset. Ex quo conjicio, quod Apollonio de parametri lineâ non constiterit. — Sed hæc *pace* istorum virorum, nec per invidiam sane sed in testimonium Veritatis interpretanda sunt; siquidem inverecundiam in tales viros penitus omnibusque titulis prorsusque contemno. — Quae supra de parametro diximus, iis pauca jam addenda occurrunt. Inspice (§. 20.) æquationes (nro. 9. 10. 11) exhibitas, ubi A, B, C designant Parametrum ejusque ambas partes, ut loco citato patet. Datur ibi A per m, n, r et Φ; hoc est, per m, n, r, a, b, c, nempe per *omnes sex* quantitates datas; nam ut supra dixi, ad parametrum constituendam concurritur ab datis quantis *omnibus*. At nunc inspice *proportiones* quoque inter parametrum ejusque partes, nempe $A : B$ et $A : C$ et $B : C$. Vides, quod litera Φ penitus *abeat*, ideoque proportio inter parametrum ejusque partes integrantes pendeat a solis *radiis* m, n, r. Quod essentiale et memorabile est. — Porro monemus, quod ad binos datos circulos tangens communis duci possit etiam ex *obliquo*, nempe â circuli alterius *dextrâ* ad alterius circuli *sinistram*, et vice versâ. Sic punctum convergentiae cadet *inter* circulos ambos, dicique potest punctum *ex transverso*. Linea ex hoc puncto exiens, circulos itidem *proportionaliter* secat.

§. 25.

Quum supra §. 22. problema totum ad Apollonii *lemmata cardinalia* revocaverim, necesse omnino videtur, horum lemmatum actualem quoque *compositionem* addere, ne

tractatio nostra ex aliquâ parte manca sit; praesertim cum hâc occasione problemati tactionum nova lux affundatur. Ne autem figurae 12 ordo et venustas novis lineis ducendis perturbetur, consultum duxi, ejus figurae partem specialiter ac denuo exhibere in fig. 13. In hâc posteriori cernis puncta *P, Q, M*, itemque *O, H, F*, prorsus eadem, quae in fig. 12 exstiterant. Et jam ergo ibi continuabimus, ubi supra §. 22. substiteram; nempe datis in rectâ punctis *P, Q, M*, datoque circulo *B*, inclinare ex *Q* et *M* duas rectas ad *F*, ita ut recta *HO* per datum punctum *P* transeat. Ex puncto *O* duc rectam *OG* parallelam rectae *PM*, deinde ex *G* duc rectam *GV*, per punctum *F* transeuntem; sic fit angulus $H = G = w$. Hinc $\triangle PHQ$ simile est $\triangle FVQ$, unde fit:

$$FQ . HQ = PQ . VQ.$$

Ergo cum datum sit $FQ . HQ$, itemque data recta *PQ*, hinc datur *VQ*, daturque punctum *V*. Jam porro ad punctum *O* duc tangentem *OT*, eritque $\triangle OTM$ simile $\triangle VFM$, quia nempe ang. TOM = ang. $G = w$.

Sic fit: $OM . MF = MV . MT$.

Ergo cûm datum sit $OM . MF$, itemque inventa sit recta *MV*, hinc datur *MT*, daturque punctum *T*. Sic ergo inventum est punctum *T*, ex quo ad quaesitum circuli punctum *O* educitur tangens *OT*. Sic habetur *O* punctum, et jam duc *PO*. — Haec compositio Apolloniani lemmatis cardinalis parum diversa est ab eâ, quam ex Apollonio conservavit Pappus.

§. 26.

Forsan inquies, in fig. 12 esse *tres* apices *O, F, H*, qui prorsus *eâdem* dignitate locoque sint. Eorum invento unico, dari quidem sponte *reliquos* etiam ambos; at vero si expresse *unus* apex *O* determinetur, (quod omnino §. 25 â nobis ita factum est,) pessumdari saltim *Symmetriam* constructionis, idque in *ultimo* quasi demum stadio, ubi rem symmetrice *inchoatam*, symmetrice etiam *finiri*

optes. — At vero vide, quam pulchre symmetria ista etiamnum in ipso fine salva sit. Meministi (ex §. 23, nro. I. II. III.), quod pro singulo circulo quasi *Trias* resolutionum praesto sit, quae spectant promiscue ad puncta nempe tria *O*, *F*, *H*. Resolutio jam praecedentis paragraphi â nobis precariâ electione adornata est ad inclinationem ex datis punctis *Q* et *M*; inde obtinuimus (Fig. 13.) punctum *T*, ideoque tangentem *TO* ad datum circulum. Sed adorna jam resolutionem ad puncta data *P* et *Q*, itemque ad puncta data *P* et *M*. Sic sponte duo *alia* puncta *T* obtines, ex quibus nempe tangentes ad *reliquos* duos apices *F* et *H* ducuntur. Vel ut rem verbis aliis enunciemus, trias *inclinationum*, offert puncta *tria T*, pro tangentibus *tribus* ducendis, ad puncta nempe *tria O*, *F*, *H*. Puncta ista tria *T* nunc per, T', T'', T''' designemus. Et jam quaeso effectum admirabilem (Fig. 14) obtutu uno complectere! Supponit haec figura *inventam* esse punctorum triadem T', T'', T'''; et actualiter ductis inde tangentibus tribus, oriri vides $\triangle X\Psi Z$. Quemadmodum triangulum *OFH* circulo *intus* inscriptum fuit, ita nunc habes triangulum *extus* circumscriptum; idque ope punctorum T', T'', T'''. (Observa simul *parametri* singularem efficaciam! In illo habitant primo puncta primitiva *P*, *Q*, *R*, (Fig. 12) deinde puncta *M*, *N*, et jam porro puncta etiam T', T'', T'''.) — Sic ergo eâdem symmetriâ, quâ triangulum *internum OHF* determinare docuimus, jam etiam *circum* scriptum triangulum reperis. Docet hoc ad *resolutionem* quidem nihil novi, (nam habito interno habetur etiam *circumscriptum*); commemoranda tamen fuit res tum in supplementum totius instituti nostri symmetrici, tum quia perspicitur jam, quibus principiis resolutio *supra* (§. 5.) memorata praecise *nitatur*. Inspice Fig. 11; cernis ibi triangula quatuor *inscripta* circulis, eaque *similia*. Per eorum apices duc tangentes; orientur quatuor *extus* circumscripta triangula, quae inter se item erunt *similia*. Quo-

modo jam haec externa triangula obtineantur pro singulo datorum circulorum, subinde *monstravimus*; obtinentur nempe ope *parametri* ejusque punctorum T', T'', T'''. Ergo haec tria externa triangula *data* sunt, tum specie tum magnitudine. Sed similia sunt etiam *quarto* externo triangulo, (ut modo dixi,) ergo quartum externum hoc datum est *Specie*. Et jam propere inspice Fig. 2; nempe si ibi expresse theoriam trianguli PQR desideras, (ut supra §. 5. inchoaveram,) tum *sequens* tibi problema solvendum obvenit. „Describere triangulum *specie datum*, cujus apices P, Q, R sint in rectis positione datis PO, QO, RO." — Quod est praecise *Neutoni Lemma XXVI*. Sed haec trianguli PQR species pendet, ut vidimus, â parametri saepe dictis punctis T', T'', T''', quorum vel *unico* dato, totum problema jam *resolutum* esse vidimus. Theoria triangulorum externorum pendet igitur â theoriâ *internorum*; et cum theoriâ posteriorum, theoria priorum *per se* data est, ut subinde vidimus. Necessarium tamen fuit, hoc distincte *explicare*, atque de characteristico hoc ΔPQR debitam rationem *theoreticam* reddere, sive monstrare, quo pacto illud *ipsum* quoque penitus â virtute *parametri* pendeat, parametrique punctis T', T'', T''' symmetricis quasi symmetrice annexum seu alligatum sit. — Ceterum si triangulum circulo inscriptum habeat angulos F, O, H, et jam per ejus tres apices describatur triangulum *externum*, (nempe ex circuli tangentibus formatum.) tum hoc externum habebit angulos $\pi - 2F$, $\pi - 2O$, $\pi - 2H$; ubi nempe $\pi = 180°$. Estque haec triangulorum externorum et internorum dependentia inter se *arithmetica*.

§. 27.

Sequitur jam valde paradoxa quaestio. Apollonii problema solutum est pro *tribus* datis circulis â quarto contingendis; cur nemo proposuit jam sequentum *altiorem* casum? Datis nempe *quatuor* circulis â *quinto* contingen-

dis? — Respondes, te eo casu investigaturum circulum, qui *tres* ex istis datis contingat; quartum datum circulum tum vel *sponte* simul contingi, vel si non contingat, problema *impossibile* esse, et contactum communem pro istis datis quatuor circulis *non* omnino dari. — Sed hoc responsum plane *insufficiens*, et merum quasi Effugium est; nec etiam Geometria casum hunc resolvere *potis* erat hactenus, quamdiu nempe *parametri scientia* defuit. Ut jam videbimus. Finge eum, qui tibi quatuor circulos à quinto contingendos proponit, pro certo tibi edicere, quod contactus talis communis *possibilis* sit. Ex datis circulis *A, B, C, D*, eliges jam pro lubitu *tres A, B, C*, et quaeres circulum, qui hos tres contingit; continget is jam simul datum quartum *D*. Hunc ergo quartum *per Accidens* tantum ad contactum admittis, et rem tuam habuisti cum *tribus* tantum datis circulis, callide praevidens, quod etiam *quartus* datus sponte ad contactum se sit compositurus. Jam quaeso te, num hoc sit factum aut inceptum *Geometricum*? Et ubi manet *Symmetria* illa resolutionis tuae, secundum quam dati circuli omnes quatuor *eodem* titulo et ordine in censum veniunt, et modo prorsus *eodem* ad resolvendum concurrere vel in consensum vocari debent? — Sed finge nunc porro *alterum* casum, nempe ab eo, qui proponit, *incertum* tibi relinqui, num contactus omnium *A, B, C, D* cum eodem quinto succedat. Eliges, ut supra, pro lubitu tres *A, B, C*; quaeres quartum hos contingentem. Si is datum quartum circulum *D non* simul continget, problema dices *impossibile* esse. Recte habet. At vero quaeso te, num hoc sit inceptum *geometricum*? Vel ex quonam tempore Geometrae successum suarum constructionum à *posteriori* demum exspectant? — Ex his intelligis jam, quod sane *duo* sint observanda circa hanc materiam; *primo*, quod Geometrae officium sit, exhibere pro tali casu *Criterium Tactilitatis*, ex quo nempe dijudicabile fiat, num quatuor dati *A, B, C, D*

possint ab quinto contingi, nec ne. *Secundo*, si criterium hoc *adesse* deprehendatur, tum per *symmetricas* operationes ad constructionem dati *omnes* quatuor circuli certo *similique* tenore erunt *adhibendi*. Et sic ergo *tunc* demum Geometra praestanda praestitisse censendus erit. — Quoniam autem ea res merae Speculationis, et sumtus nimii pertimescendi mihi sint, in brevi rei indigitatione acquiescam. Dati sint (Fig. 15.) quatuor circuli *A, B, C, D*. Eorum singuli tres habebunt seu formabunt suam peculiarem *parametrum*. Ergo cum combinationes *quatuor* existant *A, B, C*, et *A, B, D*, et *A, C, D*, et *B, C, D*, ideo parametros habebis *quatuor*. (Habet autem quaevis parameter, ut supra dudum vidimus, punctum alicubi *intermedium*, quod in superioribus per literam *Q* designavimus.) — Criterium tactilitatis jam hoc est, ut ex istis quatuor parametris, duo aliqui habeant punctum illud intermedium *Commune* seu *idem Q*. Deinde quod *alterum*, nempe constructionem *Symmetricam* attinet, eam rem brevitatis causa per solum intuitum *Figurae* indigito. Agitur nempe de *quadrangulis* inscribendis, quemadmodum supra de inscribendis *triangulis* agebatur. Sed jucunditatem hujus rei expediendae lectoribus relinquere cogimur.

§. 28.

Priusquam ab hâc geometricâ tractatione prorsus discedimus, pauca quaedam observanda occurrunt. Primo patet, quod nostra resolutio casus principalis de tribus circulis datis (§. 22.), contineat simul etiam casus minores et *reliquos*. Pone verbi causa (Fig. 12) circulum *B* sensim *diminui*; tum convergentiae puncta ambo *P* et *Q* sensim accedent ad centrum *B*, tandemque cum illo coincident. Convergentiae tertium punctum *R* autem manet ut fuerat; siquidem circuli *A* et *C* manent iidem. Ergo si dantur circuli duo cum *puncto* dato *B*, tum parameter erit *BR*. Reliqua nunc ipse expedi. — Secundus casus est, si loco circuli unius data sit

recta; contemplare, quid hic accidat. Sit datus (Fig. 16) circulus A, et recta BC; pone adfuisse loco rectae hujus circulum O, ita ut OA normaliter per datam BC transeat. Circulorum A et O centrum convergentiae erit P. Finge nunc centrum O in infinitum *recedere*, et quidem perpendiculari ad rectam BC motu. Sic ergo convergentiae angulus P continuo *crescit*, et punctum P sensim ad peripheriam circuli A accedet. Si punctum O abiit in *infinitum*, punctum P erit in *peripheria* circuli A, et ambo rectae, quae angulum P constituerant, formant jam *tangentem* circuli A, eritque ea tangens datae rectae BC *parallela*. Et *punctum* circuli, ubi is â tangente dictâ tangitur, est jam circuli A et rectae BC punctum *parametricum*. Plura jam addere non lubet. Apollonius ceterum *vix* vidètur de hoc unico problemate duos immensos quasi libros scripturus fuisse, si (parametri ope) solutionem generalem et symmetricam pro tribus circulis possedisset, vidissetque, ceteros casus non esse nisi facillima corollaria *generalis* problematis. De his autem satis dictum; sequitur observatio alia. — Symmetria ea, quam in geometricâ tactionum problematis resolutione regnare vidimus, etiam in consideratione *trigonometricâ* pulcherrime conservatur; quod ipso *facto* jam (sed sine demonstratione) confirmabimus. Ostensum est supra (§. 32.), quomodo (Fig. 12) per puncta parametrica P, Q, M, inscripti trianguli OHF puncta O, H, F symmetrice determinentur; et erat haec illa, quam saepe dixi, resolutionum symmetrica quasi *Trias*. Et vidimus ibi, quam admirabilis concentus et harmonia regnet inter parametri partes PQ, QM, PM, et inter triangulum inscriptum OHF. Sed *similis* jam concentus regnat etiam inter *angulos* ad parametrum et inter *angulos* trianguli inscripti. Brevitatis causâ rem unicâ formulâ complectas. Pone rectangula data:

$$PO.PH = \alpha^2, \quad QF.QH = \delta^2. \quad MF.MO = \epsilon^2.$$

Erat hactenus $PQ = A$; sit porro $QM = D$, et $PQ + QM = A + D = E$. Jam erit:

adt. Sin O Sin H Sin $F = A. D. E.$ Sin M Sin P Sin Q.

Hanc formulam si cum figurâ comparas, perfectam *Symmetriam* animadvertes. Demonstratio, quae non difficilis est, penes lectorem esto. — Denique monendum est etiam hoc. Dedimus constructionem (Fig. 12) pro eo casu, quo circuli dati tres *extus* quartum sunt. Si dati tres *intus* quartum sunt, reperies, resolutionem prorsus *eodem* modo procedere. — At si datorum circulorum aliquis extus, et aliquis *intus* quartum est, tum inter hos aliquos est sumendum convergentiae punctum id, quod supra (§. 24.) *ex transverso* nominavi; deinde levi mutatione, quae per ipsam propositi systematis conditionem praescripta est, constructio symmetrice transigetur. Hanc rem tirones exercitii causa ipsi expediant. — Jam vero geometrica dissertationis pars finita est. Ceterum theoria parametri jam per se et independenter â problemate tactionum aestimabilis accessio geometriae censenda est, potestque hoc theorema, (quod nempe trium circulorum puncta convergentiae in directum jaceant,) in aliis etiam quaestionibus geometricis necessarium vel utile esse. Unde si optimus Vieta olim *hyperbolis* (ut ita dicam) aquâ et igne interdixit, saltim *parametri* virtutem et efficaciam collaudaturus erat; siquidem parameter haec revera hyperbolarum *elementare quasi surrogatum* est. — Sed lusuum ingenii satis est, ne forte eximii viri Manes incommodare videar.

§. 29.

Restat, ut symmetriam etiam *algebraicam* problematis hujus exhibeamus; in quo negotio, si rite tractetur, calculi prolixiores non occurrunt. Agitur de quaesito radio x per aequationem quadraticam exhibendo ita, ut coëfficientes per a, b, c, m, n, r dentur symmetrice. Hunc in fi-

nem transscribimus aequationes ambas (§. 2.) allatas, quae (Fig. 1.) ita habent:

1. $a^2 + m^2 - n^2 + 2(m - n)x = 2a(m + x)\,\mathrm{Cos}(B - \varphi)$.

2. $c^2 + m^2 - r^2 + 2(m - r)x = 2c(m + x)\,\mathrm{Cos}\,\varphi$.

Adhibeantur interim substitutiones hae:

3. $a^2 + m^2 - n^2 = f$. $2(m - n) = g$.

4. $c^2 + m^2 - r^2 = h$. $2(m - r) = k$. Ergo fit:

5. $f + gx = 2a(m + x)\,\mathrm{Cos}(B - \varphi)$.

6. $h + kx = 2c(m + x)\,\mathrm{Cos}\,\varphi$. Hinc porro:

$$\frac{f + gx}{2a(m + x)} = \mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Jam in hanc impone valorem ipsius $\mathrm{Cos}\,\varphi$ ex praecedente (6), ut fiat:

7. $\frac{c(f + gx) - a\,\mathrm{Cos}\,B(h + kx)}{2ac(m + x)} = \mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,\varphi$.

Distincte nunc operationes, quibus expresse opus est, indicabimus. Sit area $\Delta ABC = T$; ergo $ac\,\mathrm{Sin}\,B = 2T$, ideoque:

8. $\mathrm{Sin}^2 B = \frac{4T^2}{a^2c^2}$, $\mathrm{Cos}^2 B = 1 - \frac{4T^2}{a^2c^2}$.

Sume nunc ipsius (7) utrinque quadratum, (in quo pones $\mathrm{Sin}^2\varphi = 1 - \mathrm{Cos}^2\varphi$, deinde hujus cosinus valorem ex istâ (6) impones;) in quadrato hoc occurrunt $\mathrm{Sin}^2 B$, $\mathrm{Cos}^2 B$, $\mathrm{Cos}\,B$. Loco $\mathrm{Sin}^2 B$ et $\mathrm{Cos}^2 B$ impone valores (8), ut ergo $\mathrm{Cos}\,B$ solus remaneat. Sic opera levissimâ ante oculos erit sequens aequatio:

9. $(a^2k^2 - 2acgk\,\mathrm{Cos}\,B + c^2g^2)x^2 + 2(a^2hk + c^2fg - ac\,\mathrm{Cos}\,B(fk + gh))x + a^2h^2 - 2acfh\,\mathrm{Cos}\,B + c^2f^2 = 16\,T^2(m + x)^2$.

Haec aequatio, (quam in posterum *Primitivam* nominabimus,) jam per se et solo intuitu characterem suae ingenuitatis prae se fert. Primo in oculos incurrit, quam apte trianguli *area* $= T$ introducatur; secundo patet, quod aequationis partes eae, quae literam T continent, quasi *specialem* seu *peculiarem* categoriam sistunt, et ideo *seorsim* ad *dextram* constituendae sunt; quemadmodum id vel

solo *intuitu* partium earum, quae tum ad dextram tum ad sinistram aequalitatis locatae sunt, pro congrue acto agnoscitur. Tertio jam expresse coëfficientes ad *sinistram* positos intuere; habent et *ipsi* quoque suam regularitatem et manifestum ordinem. Eorum primus ac tertius repraesentant, vel formâ suâ imitantur, theorema illud vulgare $p^2 - 2pq \operatorname{Cos} B + q^2 = u^2$; nec etiam *secundo* coëfficienti sua regularitas certusque tenor deest, et sane tota haec aequatio quadratica perquam pulchre in oculos cadit. Brevitatis causa ea sic scribi potest:

10. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 16\, T^2 (m + x)^2$.

Et jam investigandum est, quid ad *Symmetriam*, quam hic intendimus, requiratur.

§. 30.

Aequatio ista primitiva fiet nempe *Symmetrica*, si *cosinum B*, qui isti symmetriae obstat, exterminemus. Ergo cum (Fig. 1) sit:

$$a^2 - 2ac \operatorname{Cos} B + c^2 = b^2,$$

ex hâc jam cosinus B in primitivam nostram substituendus est; quo facto coëfficientes hujus primitivae omnes aequabili modo per a, b, c et m, n, r et T symmetrice exhibebuntur. Sed enimvero ad hanc symmetriam tamen aliquid adhuc deesse videbis. Est nempe ad dextram sejuncta pars $16\, T^2 (m + x)^2$, ubi factor $(m + x)^2$ nequaquam est symmetricus. Continet enim terminos m^2 et $2mx$, ergo ad symmetriam requiritur, ut porro termini $n^2 + r^2 + 2(n + r)x$ ad sint. Ergo ut huic defectui symmetriae occurrerem, in utrâque parte primitivae aequationis addidi:

$$16\, T^2 (n^2 + r^2 + 2(n + r)x).$$

Postquam id factum erat, in sinistra parte valorem T^2 (ope vulgaris regulae) per trianguli latera a, b, c expressi. Jamque tandem pro f, g, h, k, suos valores respectivos (3. 4.) iterum reposui. Quo modico labore transacto coëfficientes α, β, γ symmetricos hos adeptus fui:

1. $\alpha = 4aa(r-m)(r-n) + 4bb(m-n)(m-r) + 4cc(n-m)(n-r)$.

2. $\beta = -2a^4(m+n) + 2a^2b^2(2n+m+r) + 2a^2(r-m)(r-n)(2r+m+n)$
$-2b^4(n+r) + 2a^2c^2(2m+n+r) + 2b^2(m-r)(m-n)(2m+n+r)$
$-2c^4(m+r) + 2b^2c^2(2r+m+n) + 2c^2(n-m)(n-r)(2n+m+r)$.

3. $\gamma = a^2b^2c^2 - a^4(m^2+n^2) + a^2c^2(2m^2+n^2+r^2) + aa(r^2-m^2)(r^2-n^2)$
$-b^4(n^2+r^2) + a^2b^2(2n^2+m^2+r^2) + bb(m^2-n^2)(m^2-r^2)$
$-c^4(m^2+r^2) + b^2c^2(2r^2+m^2+n^2) + cc(n^2-r^2)(n^2-m^2)$.

Jam ergo sponte patet, quod solâ indigitatione *legis*, quam hae functiones observant, opus est, et verbi causâ, si quis terminum $4aa(r-m)(r-n)$ qui in coëfficiente α occurrit, cum Fig. 1 conferat, lex pro ejus coëfficientis partibus reliquis sponte in oculos incurrit. Ergo in aequatione symmetricâ nequaquam opus est, inventos (1. 2. 3.) terminos *omnes* scribere, sed lectori intuenti quasi *subintelligendi* exhiberi possunt. Atque sic ergo, (si substitutiones plane symmetricae:

$$m + n + r = \Sigma$$

$m^2 + n^2 + r^2 = S$ adhibeantur, tunc aequatio quadratica symmetrica, quam quaerimus, ante oculos erit hujus formae:

4. $(4a^2(r-m)(r-n+\ldots)x^2 + 2(a^2b^2(n+\Sigma) + \ldots - a^4(m+n) - \ldots$
$+ a^2(r-m)(r-n)(r+\Sigma))x + \ldots$
$+ a^2b^2c^2 - a^4(m^2+n^2) \ldots + a^2b^2(n^2+S) + \ldots$
$+ aa(r^2-m^2)(r^2-n^2) + \ldots$
$= 16T^2(x^2 + 2(m+n+r)x + m^2+n^2+r^2)$.

Sic ergo ante oculos habemus complexum problematis hujus algebraicum symmetricum, et quidem sine precariis substitutionibus exhibitum.

§. 31.

Quamquam autem, (quod hactenus non factum fuit,) formula symmetrica actu nunc exhibita sit, fatendum tamen est, eam *oculis* magis quam intellectui satisfacere, et jure igitur suspicabimur, quod haec immediata datorum a, b, c, m, n, r introductio in formulam *nondum* offerre censenda sit genuinam problematis nostri resolutionem algebraicam.

Et *recte* omnino suspicaris. Quare ad *primitivam* nostram (§. 29, nro. 9.) revertamur, quae tam praeclarae indolis est, ut mens lectoris ad insigne quoddam *Gaudium algebraicum* praeparanda sit. — Est (Fig. 1) ac $\text{Sin}\, B = 2\, T$, et $c\, \text{Sin}\, C = a\, \text{Sin}\, A$; hinc fit $aa\, \text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, B = 2\, T\, \text{Sin}\, C$. Quae formula exhibet aream trianguli $ABC = T$ per unum *latus* et per angulorum *sinus*. Ergo similiter tractando *reliqua* duo latera, habentur valores tres:

1. $aa\, \text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, B = 2\, T\, \text{Sin}\, C.$
2. $bb\, \text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, C = 2\, T\, \text{Sin}\, B.$
3. $cc\, \text{Sin}\, B\, \text{Sin}\, C = 2\, T\, \text{Sin}\, A.$

Jam ergo in dictâ primitivâ (§. 29, nro. 9) literas ibi conspicuas a, c elimina ope praecedentis (1 et 3). Quod momento temporis expeditur. Sic ante oculos habebis hanc novam:

$$4. \ (g^2 \text{Sin}^2 A - 2gk\, \text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, C . \text{Cos}\, B + k^2\, \text{Sin}^2 C)\, x^2$$
$$+ 2 (fg\, \text{Sin}^2 A + hk\, \text{Sin}^2 C - (fk + gh)\, \text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, C . \text{Cos}\, B)\, x$$
$$+ f^2\, \text{Sin}^2 A - 2fh\, \text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, C\, \text{Cos}\, B + h^2\, \text{Sin}^2 C$$
$$= 8\, T\, (m + x)^2\, \text{Sin}\, A\, \text{Sin}\, B\, \text{Sin}\, C.$$

In hâc jam porro substitutiones usurpentur:

5. $g\, \text{Sin}\, A = G. \quad f\, \text{Sin}\, A = F.$
   $k\, \text{Sin}\, C = K. \quad h\, \text{Sin}\, C = H.$

Quae substitutiones miram elegantiam et effectum habent; fit enim:

$$6. \ (G^2 - 2\, GK\, \text{Cos}\, B + K^2)\, x^2 + 2(FG + HK - (FK + GH)\, \text{Cos}\, B)\, x$$
$$+ F^2 - 2\, FH\, \text{Cos}\, B + H^2 = 8\, T (m + x)^2\, \text{Sin}\, A . \text{Sin}\, B\, \text{Sin}\, C.$$

Aequatio haec adeo generosa est, atque tam venuste in oculos cadit, ut illam vel imo Barbaro homini placituram putem; et manifestum est jam, quod problematis nostri algebraica tractatio non minores elegantias habeat, quam geometrica. Quodsi aequationem novissimam cum *primitivâ* conferas, animadvertes, quod ambae inter se plane *similes* existant, sed jam nunc (nro. 6) demum legitime *reducta* forma est.

§. 32.

At vero reducta haec aequatio insuper *alio* titulo pretiosa est. — Quum enim (*instinctu* quodam, quo nempe naturam aequationis hujus tentaminibus variis indagari conabar,) sinistrae partis (nempe ejus, quae literam T non continet,) *factores* ambos inquirerem, detexi cum summâ laetitiâ, hos factores esse *rationales.* Quod sane *praeter* spem ita evenit, siquidem coëfficientes partis dictae sinistrae nequaquam eam physiognomiam habent, ut rationalem decompositionem exspectares. Ad hanc rem ipso facto comprobandam pones interim $T=o$, (siquidem de factoribus unice *sinistrae* partis agitur,) deinde sinistram hanc partem resolve; inventâ sic radice $x=\theta+\sqrt{\lambda}$ reperies, quod posterior terminus λ perfectum *quadratum* sit. Experimentum hoc autem, (intra minuta pauca instituendum) ita venuste succedit, ut nemini non inter lectores rem suo Marte experiri suadeamus. Actualis autem resolutio sinistrae partis offert valorem seu radicem:

$$1.\ x=\frac{(FK+GH)\operatorname{Cos}B-FG-HK\mp(FK-GH)\operatorname{Sin}B\sqrt{-1}}{G^2-2GK\operatorname{Cos}B+K^2}$$

Priusquam partem dextram, quae literam T continet, restituimus, quaedam circa praecedentem decompositionem observanda occurrunt. Primo haec formula indigitat, quales absolute ac citra omnem precariam electionem *substitutiones* adhibendae sint, ut aequatio quadratica tum simplicissimam *formam* induat, tum ad ipsam constructionem etiam *geometricam* quam fieri potest, *aptissima* fiat. Insunt autem formulae praecedenti expresse *quatuor*, ejusmodi functiones, (eaeque simplicissimae,) quae substitutionibus manifesto destinantur. Primo *denominator* in censum venit:

$$2.\ G^2-2GK.\operatorname{Cos}B+K^2=P^2,$$

Ad hanc literam P revocandae sunt jam, ut sponte patebit, partes in *numeratore* praesentes, et cum singula

pars qualis FK et cetera, existat *tertiae* dimensionis, (uti intelliges, si ad literarum F, G, H, K significatus veros respicias), ideo pro dictis numeratoris partibus ita substituendum est:

3. $(FK + GH) \operatorname{Cos} B = P^2 R.$
4. $(FK - GH) \operatorname{Sin} B = P^2 S.$
5. $FG + HK = P^2 Q.$

Restat pars *dextra* aequationis generosae (§. 31, nro. 6) nempe pars ea, quam interim seposueram; et substituatur:

6. $8\, T \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C = \Pi^2$

Hujus membri, (ut hoc in transitu dicam,) observabis perfectam *Symmetriam*; estque vel imo ipse numerus 8 quoque symmetricus. Nam $8 = 2 . 2 . 2$; ut ergo singulus numerus 2 ad singulum trium sinuum spectet. Usurpando jam substitutiones memoratas, haec ista (1) formam sequentem induit:

7. $x - R + Q \pm S \sqrt{-1} = 0.$

Cernis hic ambas radices; estque earum productum:

8. $(x + Q - R)^2 + S^2 = 0.$

Atque haec est ergo Decompositio sinistrae partis in aequatione generosâ (§. 31, nro. 6). — At vero in hoc decompositionis negotio posuimus partem generosae dextram $= 0$; quod falsum est. Ergo haec dextra pars jam restituenda est. Si illam in dextro suo loco *reliquissem*, tum generosa tota, ut resolveretur, per suum coëfficientem primum prius *dividenda* fuit, nempe per $G^2 - 2\, GK \operatorname{Cos} B + K^2$ hoc est per P^2. Ergo si dextram partem nunc restituimus, ea *per* P^2 *divisa* in formulam revertitur. Ergo generosa nostra jam talis aut sequens est:

9. $(x + Q - R)^2 + S^2 = \dfrac{\Pi^2 (x + m)^2}{P^2}.$

Sumtâque differentiâ $Q - R = e$, et multiplicatione per P^2 factâ, totus jam complexus venustasque rei uno obtutu in oculos cadit; fit enim:

10. $\Pi^2 (x+m)^2 - P^2 (x+e)^2 = P^2 S^2$.

Quâ quidem formulâ vix quidquam pulchrius (et in tam complicato problemate inexspectatius) unquam vidi aut novi, praesertim si reflectatur ad quantitatum Π^2 et P^2 significationem symmetricam et concinnam et non *precarie* in calculum introductam sed ex problematis ipsius *fonte* petitam, ac denique temporis articulo et elegantissime *construibilem*. Lectores panegyrin hanc excusatam habeant; homo enim sum. Ceterum praecedens aequatio formae sit $A^2 - B^2 = C^2$, hoc est $(A+B)(A-B) = C^2$, hinc ea (quod illi *penitus* Essentiale et Characteristicum est,) in *rationales duos factores* dirimitur, ut prodeat forma:

11. $(\mathfrak{A}x+\mathfrak{B})(\mathfrak{C}x+\mathfrak{D}) = P^2 S^2$.

Qui vero ad rem hactenus gestam probe attendit, is clare intelliget, quod hoc phaenomenon unice à *rationali decompositione* sinistrae partis in *generosá* aequatione proficiscatur.

§. 33.

Sed ut aequatio superior (nro. 10) penitus cognoscatur, sinistra illius pars ordinetur secundum potentias ipsius x, et jam demum pulcher concentus et ordo magis quam ante in oculos incurrit. Fit enim:

1. $(\Pi^2 - P^2)x^2 + 2(\Pi^2 m - P^2 e)x + \Pi^2 m^2 - P^2 e^2 = P^2 S^2$.

Quae tam regularis et concinna est, ut oculos vix ab illâ dimovere possim. Consideranda nunc est sub formâ etiam *fractâ*:

$$2.\quad x^2 + 2\,\frac{\Pi^2 m - P^2 e}{\Pi^2 - P^2}\,x + \frac{\Pi^2 m^2 - P^2 e^2}{\Pi^2 - P^2} = \frac{P^2 S^2}{\Pi^2 - P^2}.$$

Intuere ejus terminos expresse duos ultimos; nimium si res ad ipsum *constructionis* actum deduci postuletur, manifesto hi duo ultimi termini in *unum* conjungendi sunt, ponendo nempe $e^2 + S^2 = q^2$, ut jam tandem habeatur haec finalis:

$$3.\ x^2 + 2\,\frac{\Pi^2 m - P^2 e}{\Pi^2 - P^2}\,x + \frac{\Pi^2 m^2 - P^2 q^2}{\Pi^2 - P^2} = o.$$

Construe nunc $\Pi^2 - P^2 = L^2$, deinde ambos coëfficientes fractos praecedentis aequationis item construe, (quod fit facillime, sumendis aliquot lineis quartis proportionalibus,) ut nanciscaris coëfficientium horum priorem $= A$, alterum $= - BB$, (nam fractionem ultimam istius (3) deprehendes plerumque *negativam* esse, si rem in actum deducis,) ut jam habeatur:

$$4.\ x^2 + 2Ax - BB = o,\ \text{vel}\ x = - A + \sqrt{(AA + BB)}.$$

Ceterum litera quoque A, plerumque cadet, ut puto, *negative*; quod sine dubio pendebit â *datis*. Ego constructionem hanc, (exorsus nempe âb generosâ aequatione §. 31.) absolvi intra tria minuta prima; quae est laudabilis utique formulae nostrae celeritas, (pro conditione nempe tam complicati problematis); praesertim cum formula valeat pro *generali* casu, nempe trium circulorum inaequalium. —

§. 34.

Sed consultum tamen videtur, materiam hanc paulo distinctius exponere. Quoniam enim in praecedentibus istam *decompositionis* operationem immiscuimus, res adhuc aliquid obscuritatis habere videtur; ergo non piget, negotium totum clare ac distincte et ut cuique satisfiat, hic repetere. — Sit inventa et proposita nempe aequatio generosa:

$$1.\ (G^2 - 2GK\,\text{Cos}\,B + K^2)\,x^2 + 2(FG + HK - (FK + GH)\,\text{Cos}\,B)\,x$$
$$+ F^2 - 2FH\,\text{Cos}\,B + H^2 = 8\,T(m + x)^2\,\text{Sin}\,A\,\text{Sin}\,B\,\text{Sin}\,C.$$

Ab *hânc* enim ordimur, et cum *per se* quidem jam veram problematis resolutionem algebraicam sistat, vidimus tamen, in illo latere *aliam* adhuc aequationem reductam et concinnissimam *hanc*:

$$2.\ (\Pi^2 - P^2)\,x^2 + 2\,(\Pi^2 m - P^2 e)\,x + \Pi^2 m^2 - P^2 e^2 = P^2 S^2.$$

Ante omnia construendus est valor:

$$3.)\ G^2 - 2GK\,\text{Cos}\,B + K^2 = P^2.$$

Angulum datum B nempe, include lateribus G et K; latus trianguli tertium jam erit $= P$. Sic P innotescit. Considerandus ergo jam est coëfficiens $F^2 - 2FH \operatorname{Cos} B + H^2$, et cum F, H dimensionum *duarum* existant, ergo coëfficiens hic ad formam debitam *reducendus* est. Construe igitur:

4.) $F = P.M$, $H = P.N$, Sic habentur, M et N.

Est ergo nunc:

$$F^2 - 2FH \operatorname{Cos} B + H^2 = P^2 (M^2 - 2MN \operatorname{Cos} B + N^2).$$

Include nunc angulum B lateribus datis M et N; latus tertium dabitur, dicaturque $= Q$. Sic erit;

5.) $M^2 - 2MN \operatorname{Cos} B + N^2 = Q^2$.

Ergo habetur jam:

6.) $F^2\ 2FH \operatorname{Cos} B + H^2 = P^2 Q^2$. In quâ P, Q, dantur.

Quod generosae aequationis partem *dextram* attinet, construendum est:

$$\Pi^2 = 8\, T \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C.$$

Quae constructio indispensabilis, at simul perquam facilis et symmetrica est. — Jam generosam intuere; loco primi ac tertii coëfficientis impones debitos valores (3) et (6), in *secundo* autem coëfficiente, pro F, H pone valores (4). Sic ergo generosa aequatio contrahitur in suam rectiorem formam hanc:

$$7.\ x^2 + 2\,\frac{MG + NK - (MK + NG)\operatorname{Cos} B}{P}\,.\,x + Q^2 = \frac{\Pi^2 (x+m)^2}{P^2}.$$

Hanc intuenti sponte patet jam, quod in secundo coëfficiente nonnullis quartis proportionalibus lineis opus sit, et construantur ergo:

8. $MG = P.A$, $NK = P.B$, $MK = P.C$, $NG = P.D$.

His in istam (7) introductis, positoque

$$A + B - (C + D) \operatorname{Cos} B = e,$$

denique ordinando secundum potestates ipsius x, obtinetur:

9.) $(\Pi^2 - P^2)\, x^2 + 2(\Pi^2 m - P^2 e)\, x + \Pi^2 m^2 - P^2 Q^2 = o.$

Quae prorsus consentit cum superiori §. 33, nro. 3. —

Problema tactionum, algebraice tractatum, aliis ultra modum *prolixum* visum est, et exhibitae sunt formulae prolixae et inconcinnae vel imo *eo* casu, ubi unus radiorum poneretur $=o$, (quod ceteroquin *salvâ* universalitate fieri posse scimus); sed praecedens formula (quae pro *tribus* circulis, iisque *inaequalibus* omnibus adornata est,) ante oculos jam sistit aequatiunculam, non modo parvam et *sine mole*, sed et quantitates illam ingredientes construuntur cum plane incredibili facilitate, siquidem rem paucis quibusdam *quartis proportionalibus lineis* absolvi vidimus. — Quod unice ab recto ordine ac *methodo* adhibitâ proficiscitur; et â debitâ introductione literae T, sine quâ neque in aequationem Generosam, nec in introductionem literae Π incidissem. Unde simul patet, nos utique non mentitos fuisse, cum supra (§. 33.) de tribus minutis primis mentionem injiceremus; nam si concertatio quasi institueretur inter hanc *algebraicam* constructionem et Vietae *geometricam*, ego *eodem* tempore juxta, quo ille, meum Ηὕρηκα exclamaturus forem; siquidem illi (ut supra §. 24. monui,) *tria* problemata, unâ cum *lemmate* construendo expedienda essent, at ego meas aliquot quartas proportionales compositâ mente et quasi in Triumphum Galliae, temporis articulo confecturus essem; praesertim si in praecedente (nro. 9) aequatione posuerim $m=o$, quod universalitate *salvâ* problematis ita fieri scimus. Ergo praecise in hoc problemate, (ubi id forsan minus exspectares,) Algebra non habet, quod prae Geometriâ erubescat. —

§. 35.

Intuere *generosam* aequationem ejusque *reductam* (§. 34. nro. 1 et 2); animadvertes, quod ista resolutio algebraica accommodata sit ad angulum B (Fig. 1), et radium datum m, nempe eum, qui in eodem centro B haeret. Ergo aequationes ambae dictae, (utut concinnissimae et elegantes) non tamen habendae sunt pro symmetricis. Nam similem

quoque calculum institues pro angulo A ejusque radium annexum $= n$, et similem quoque calculum pro angulo C ejusque radium annexum $= r$. Quae tria quasi systemata si inter se conferantur, varias elegantes offerunt speculationes, quibus hic indulgere non possum. Eo magis mirum est autem, quod praedicta reducta (§. 34. nro. 2.) *perfectam* tamen et omnibus numeris absolutam *regularitatem* prae se ferat. — Quod constructionem termini:

1.) $\Pi^c = 8\, T \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C$

attinet, manifestum est primo, esse hoc membrum plane *idem*, pro *quocunque* angulorum A, B, C totum calculum hunc subducturus es. Quo clarius autem indolem hujus termini perspicias, elegantem *transformationem* institue; sume nempe productum trium aequationum (§. 31, nro. 1. 2. 3), unde fit $\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C = \frac{8\, T^3}{a^2\, b^2\, c^2}$. Hoc in praecedentem (1) imposito, oritur nova eaque item perfecte *Symmetrica*: 2.) $\Pi = \frac{8\, TT}{abc}$.

Ad quam facillime construendam, demitte (Fig. 1) ex angulis A et C perpendicula duo, quae sint h, H, respective, Sic fit:

$$T = \frac{ch}{2},\quad T = \frac{aH}{2}.$$

Quorum productum est $TT = \frac{ac.\, h.\, H}{4}$. Quo substituto in praecedentem (nro. 2.), fit:

$$\Pi. = \frac{2\, h.\, H}{b}.$$

Atque sic patet ergo, quod membri Π constructio et *ipsa* absolvatur per *unicam quartam proportionalem*. — Quod autem resolutiones algebraicas *symmetricas* attinet, (nam ista immediata, quam supra §. 30 pro a, b, c, m, n, r dedimus, non amplius jam in censum venit,) eae petendae sunt absolute e systemate nostro *parametrico*; nempe tum pa-

rametrum *ipsam* adhibendo, tum *angulos* ad parametrum (Fig. 12 et 13), et alia ibi occurrentia data similia vel symmetrica. Exemplum est formula supra (§. 28.) commemorata *trigonometrica*. Sed negotio huic symmetrico pluribus indulgere, angusta res vetat, nec Apollonii Suevi nomine ad id expresse obligamur. Sed ut praegustum saltim nanciscaris, intuere quaeso supra (§. 30. nro. 1) coëfficientem symmetricum primum α. Deinde intuere (§. 19. nro. 6. 7. 8) partem *sinistram* aequalitatis. Videbis esse $\frac{1}{4}\alpha$ *aequale* huic sinistrae parti; ideoque

$$\alpha = \frac{4(r-m)^2(n-m)^2 AA}{mm}.$$

Ex quo specimine solo jam patet, posse coëfficientes symmetricos (§. 30. nro. 1. 2. 3) *longe* aliter exhiberi adhuc, nempe per partes *parametri* et cum illo connexas. — Quum autem supra (§. 32.) tradidissem istam *decompositionem sinistrae partis* generosae aequationis, ideoque, (ne res actusque construendi aliquid obscuritatis retineret,) negotium construendi omne in praecedenti paragrapho *repetere* coactus essem, tamen illa decompositio minime sine utilitate fuit. Nam formula (§. 34. nro. 9.), ad quam ibi immediatâ operatione deducti sumus, est quidem plane eadem cum istâ *priori* (§. 33. nro. 3); sed nondum consentit cum reductâ *Perfecte* regulari (§. 34. nro. 2), hoc est, sine decompositionis negotio ignota nobis mansisset illa pulcherrima proprietas, esse $e^2 + S^2 = Q^2$, quo in dictae aequationis (§. 34. nro. 9.) ultimum membrum substituto, *demum* illa perfecte regularis forma prodit:

$$2.)\ (\Pi^2 - P^2)\, x^2 + 2\,(\Pi^2 m - P^2 e)\, x + \Pi^2 m^2 - P^2 e^2 = P^2 S^2.$$

Proprietas enim essentialis haec, et ad perfectam regularitatem requisita $e^2 + S^2 = Q^2$ aliter *non* innotescit, nisi ex ipso *decomponendi* actu, et praecise quidem ex eo membro, quod ibi post se habet signum *imaginarium*. Quod attento lectori facile in oculos incurret. Praecedens (2) ce-

terum habet etiam id utilitatis, quod sponte ad quasdam principales *determinationes* vel casus *memorabiliores* problematis manu ducit. Habes enim examinandos ultro casus hos speciales perquam elegantes:

$$\Pi^2 - P^2 = o.$$
$$\Pi^2 m - P^2 e = o.$$
$$\Pi^2 m^2 - P^2 e^2 = o.$$

Itemque casum specialem $m = e$, qui singularis prorsus est. Quorum examen aliis instituendum relinquo. Sed haec res docet saltim, quam non contemnenda sit Algebra ad ipsam Geometriam adhibita; nam potest interdum leges et combinationes rerum offerre, quas in medium afferre Geometra vix aut non omnino potis foret. — Sed jam satis est, siquidem fidem datam solvisse nobis videmur.

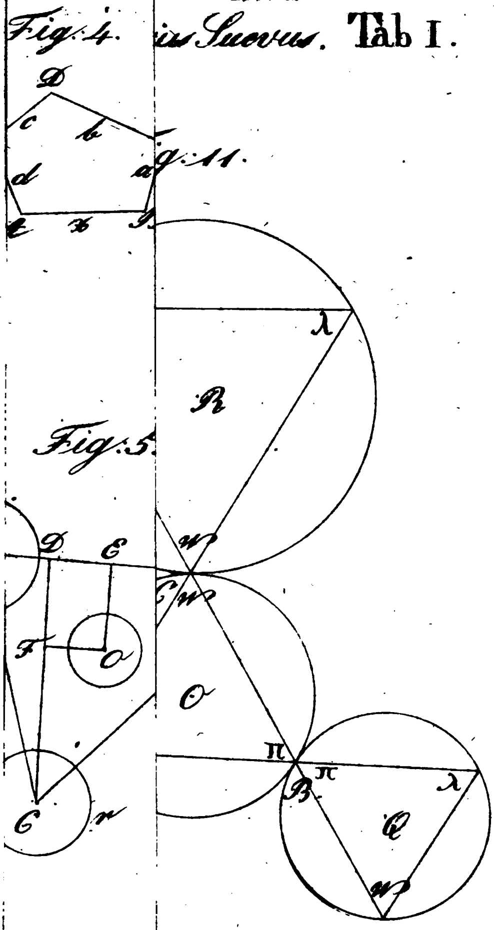
§. 36.

Sphaera opaca, quae ab aliquâ majori sphaerâ lucente illustratur, habet post se semper conum *umbrosum*. Duc planum per centra solis, terrae et lunae; sic habes harum trium sphaerarum circulos maximos, in eodem plano positos. Quaere eorum puncta convergentiae; erunt haec puncta manifeste *apices* conorum umbrosorum, siquidem terra *lunam* collustrat, et sol *utramque*. Quod si quis jam posset in viciniâ spectator esse, is videret, hos tres apices umbrosos in *quâvis* positione dictorum trium corporum, semper jacere in *directum*. Ergo theorema parametri occurrit in Physicis. At vero *penumbrarum* apices haerebunt in puncto, quod supra dixi convergentiae punctum *ex Transverso*.

Errata.

Pag. 4 lin. 8 lege: esto $= x$.
— — — 10 lege: $(n + x)^2$.
— — — 11 lege: $(r + x)^2$.
Pag. 7 §. 5 lin. 7 lege: vi talis
— 11 lin. 22 lege: - 2 *ad* Cos$(C + D + E)$
— 15 lin. 9 lege: donatas.
§. 10, lin. 4 lege: circulum. Recta.
§. 19, sub fin. lege: Cos $\varphi = -1$.
Pag. 29 lin. 1 lege: ponatur φ^1
— 33 lin. 3 ab infra, lege: per ideam.

ius Suevus. Tab I.



Errata.

Pag. 4 lin. 8 lege: esto $=x$.
— — — 10 lege: $(n+x)^2$.
— — — 11 lege: $(r+x)^2$.
Pag. 7 §. 5 lin. 7 lege: vi talis
— 11 lin. 22 lege: $-2\,ad$ $\mathrm{Cos}(C+D+E)$
— 15 lin. 9 lege: donatas.
§. 10, lin. 4 lege: circulum. Recta.
§. 19, sub fin. lege: $\mathrm{Cos}\,\varphi=-1$.
Pag. 29 lin. 1 lege: ponatur φ^{I}
— 33 lin. 3 ab infra, lege: per ideam.

…ius Suevus. Tab I.

Fig: 4.

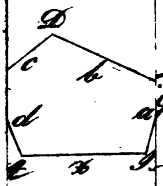


Fig: 11.

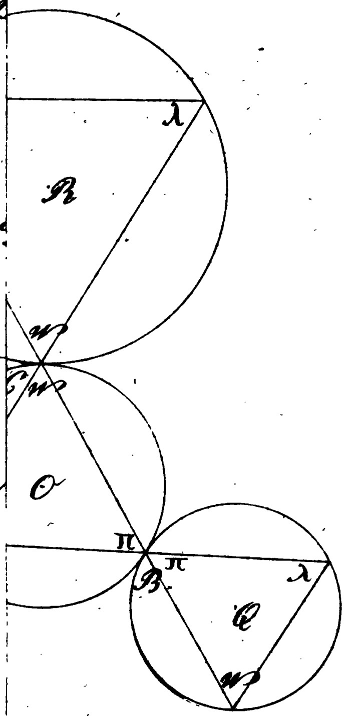
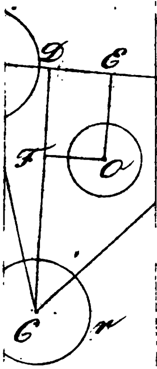


Fig: 5.



PHILOSOPHIA COSSICA

SIVE

PRAEPARATIONES

AD RESOLVTIONEM SVRSOLIDAE.

AUCTORE

M. GUILIELMO LUD. CHRISTMANN,

PASTORE THAILFINGAE

PROPE TUBINGAM.

STUTTGARDIAE,

IN COMMISSIS APUD J. B. MEZLERUM.

1815.

TUBINGAE,

LITERIS HOPFERI DE L'ORME.

PRAEFATIO.

Edidi *Artem Cossæ* 1813 et *Cardanum Suevum* 1814, quæ ambo scripta tanquam partem præsentis primam et secundam citamus. Nunc interim hanc Tertiam addimus, non iterum mox scripturi, Diversis de causis. Tertia autem vice de Eadem re scribentis candorem animi nemo incusabit, neque morem eorum sequimur, qui Arcana venditant; quod quædam tamen suppressimus, id conscia mente factum. *Philosophiam* autem dico, quidquid ex immediata cogitatione a priori profectum est. Nobis non adeo multum temporis rei Mathematicæ tribuere licet, quod per se solum excusabit brevitatem scripti, et excusasset ipsum Silentium; quoniam tamen de problemate inprimis famoso, deque nova (post Italos) algebræ sublimiori Aera inchoanda agitur, attentionem, prout materiæ generositas postulat, speramus saltim a magnis viris, quorum scito et æquo arbitrio inventa nostra consecramus.

§. 1.

Aequationem $x^2 = ax + y$ pro dx = Const. differentiando pervenimus ad $d^3 y = 0$; similiter pro cubica ad $d^4 y = 0$, et sic porro. Sic $d^{m+1} y = 0$ est ipsius $x^m = \ldots y$ Definitio, qua ab omni alia functione distinguitur. Sed hæc definitio etiam per *finitos* terminos exhibetur. — Pro $x^2 = ax + y$ finge invertendo esse $x = \Upsilon$; hinc:

1.) $dx = Pdy$. 2.) $dP = Qdy$. 3.) $dQ = Rdy$,

ut igitur Υ, P, Q, R sint functiones ipsius y. Ex (1) fit $d^2 y = - \frac{dPdy}{P}$, vel $d^2 y = - \frac{Q}{P} dy^2$. Hoc iterum differentiando, et positis pro $d^2 y$ et dP et dQ valoribus suis, fit:

4.) $3Q^2 - PR = 0$.

Similiter pro Cubica, (ubi porro accedit $dR = Sdy$,) fit:

5.) $15Q^3 - 10PQR + P^2 S = 0$.

Pariter pro altiori gradu. Formæ ut (4) et (5) designant characteristicam cossæ quadraticæ, cubicæ, et porro. — Sed ipsius etiam *Resolutionis* stamina characteristicæ insunt, ut casu $x^2 = ax + y$ sponte patet. Ex (2) et (3) et (4) fit:

$$\frac{3dP}{P} = \frac{dQ}{Q} \text{ vel } P^3 = CQ.$$

Hinc ex (2) integrando habebis P per y, inde in (1) fiet:

$$x = C'' + \sqrt{2C(C' - y)} = \Upsilon;$$

cum constantibus C, C', C'' *tribus*, quoniam ab $d^3 y = 0$ retroitur. Forsan olim plura; nunc missam hanc rem facimus.

§. 2.

Dedi in *Cardano* (§. 32. O) ipsius $x^m = ax + y$ Resolventem; ergo positis:

1. $x^m = ax + y$
2. $F(x, z) = 0$
3. $z^{m-1} = \theta z - \pi$,

intermedia seu Relationalis $F(x, z) = 0$ adhuc ignota manet. Hinc datis (1) et (3) quæritur lex Dependentiæ $F(x, z) = 0$. Hujus problematis resolutio est, quam præsenti scripto præparamus. Vulgaris interim analysis deducit ad sequentia. — Exemplo sit $x^2 = ax + y$, ergo $d^3y = 0$. Pone $x = \Upsilon$ et $dx = Pdy$. Impone $x = \int Pdy$ in resolvendam, et differentia; tum divide per Pdy, et jam iterum differentia. Sic (ob $dx = Pdy$) fiet:

4.) $dx = -\frac{dP}{2P^2}$.

Jam in resolutione æquationum supponitur invento z ex (3), haberi x ex (2); ergo x in $F(x, z) = 0$ necesse est esse *minoris* dignitatis quam in resolvenda. Hinc ista (2) supponi potest esse *Resoluta*, ut sit $x = fz$, ideoque:

5.) $dx = \mathfrak{A}dz$. 6.) $d\mathfrak{A} = \mathfrak{B}dz$,

ubi in (5) differentiando fit $d^2z = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}dz^2$. — Quod jam resolventem (3) attinet, in ea valor y Linearis vel primi gradus deprehenditur (loco citato); ergo resolvens hæc ita exprimatur: $y = Z$, ergo:

7.) $dy = \theta dz$, 8.) $d\theta = \theta' dz$.

Jam ex $dx = Pdy$ et ex (5) et (7) fit:

9.) $P = \frac{\mathfrak{A}}{\theta}$.

Hanc et ejus differentiale subroga in (4), unde fiet:

10. $dx = \frac{\mathfrak{A}\theta' - \mathfrak{B}\theta}{2\mathfrak{A}^2}dz$,

hinc ob $dx = \mathfrak{A}dz$ tandem:

11.) $\mathfrak{A}\theta' - \mathfrak{B}\theta = 2\mathfrak{A}^3$,

quæ est quæsita functio conditionalis. In hac vel ex datis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, quæres θ, θ', vel vice versa; hoc est, vel ex data re-

lationali $F(x,z)=0$ quæres *Resolventem*, ad quam ducit, vel iterum vice versa. Hic locum habet casus Posterior seu Difcilior. (Est autem in præsenti exemplo $\theta=1$ et $\mathfrak{A}=\frac{1}{2\sqrt{z}}$.)

Similiter jam pro cubica reperies:

$$dx^2=\frac{2dP^2-Pd^2P}{6P^2},$$

quæ ipsi (4) respondet; et substituendum in ea reperies $P=\frac{\mathfrak{A}}{\theta}$ ejusque differentialia, prorsus ut casu quadratico. Deinde æquabis cum $dx^2=\mathfrak{A}^2dz^2$. — Hæc theoria autem ad $F(x,z)=0$ detegendam Immediate nondum sufficit. Nam (ut integrationes in (11) necessarias taceam,) valor $\mathfrak{A}$, qui in (11) integrando inventus ponitur, in hoc integrali per æquationem Ejusdem gradus, cujus est Resolvenda *ipsá*, exhibebitur. — Nunc attigisse rem sufficit, nec ei insistimus.

§. 3.

In (*Card.* §. 33. nro. 1-3) exhibui *Comparabiles*; earum prima (posito $A=p^3$) est:

$$x^3=3pqx+p^3+q^3. \qquad K.)$$

quæritur $x=f(p,q)$. Nam *hoc* problema quoad sursolidam restat (l. cit. §. 15 et §. 36). Ipsæ p,q in K) sunt *symmetricae*, id est, permutari inter se possunt, et singulæ p et q sunt cum x homogeneæ. Sic ultro judicabis, hanc $x=f(p,q)$ esse functionem Itidem homogeneam, symmetricam, unius dimensionis. Posito jam $dx=Mdp+Ndq$, liceat monere de noto theoremate quodam. Si

$$dV=Pdx+Qdy+\ldots Tdz,$$

et V ipsarum $x\ldots z$ functio homogenea n dimensionum, erit integrale:

$$nV=Px+Qy+\ldots Tz;$$

(demonstrante primum Eulero, Calc. diff. §. 220—§. 224.) Præsenti casu jam est $n=1$, ergo integrale est:

$x = Mp + Nq$. F.)

(Membrum ultimum $p^3 + q^3$ in K) *sponte* quidem indigitat factorem quaesitum $p + q$; sed quid hoc ad altiores gradus? —) Pariter l. cit. (posito $\sqrt{A} = p$) habemus:

$$x^4 = 8pqrx + 4(p^2q^2 + ..),$$

quae iterum Symmetrica quoad p, q, r, et cum x homegenea est. Ergo posito $x = f(p, q, r)$, fit *hic* quoque:

$$x = Mp + Nq + Rr. \qquad G.)$$

Tertio jam pro $x^5 = cx + y$ loco citato (ponentes $\sqrt[5]{A} = p$) habemus:

$$x^5 = hp^3q^3r^3s^3x + k(p^5q^5r^5 + ...).$$

ubi p, q, r, s iterum symmetricam formam habent, eritque etiam $x = f(p, q, r, s)$ functio symmetrica et homogenea quoad p, q, r, s. Ergo iterum habebis integrale formae:

$$nx = Mp + Nq + Rr + Ss. \qquad H.)$$

Est autem hic $n = 3$. Quomodo jam formâ F) ad ipsos M, N reperiendos utendum sit, non est hujus instituti; casu F) et G) ipsi M, N, R singuli sunt $= 1$, at nequaquam ita casu H.).

§. 4.

Addam nunc ob sequentia aliquid ex Specialioribus nostris. — Si $x^2 = ax + y$, utrinque addatur $- 2ux + u^2$, ut fiat:

$$x - u = \sqrt{((a - 2u) x + u^2 + y)}.$$

Ut ergo x ad sinistram innotescat, necesse est evanescere ad dextram quidquid x continet, ergo $a - 2u = o$, vel $u = \frac{a}{2}$; sic fit resolutio. — Porro huic $x^3 = ax + y$ addatur $- 3ux^2 + 3u^2x - u^3$, ut fiat:

$$x = u + \sqrt[3]{((a + 3u^2) x - 3ux^2 - u^3 + y)}. \qquad R.)$$

Evanescant sub radicali partes x continentes, eritque sic:

$$u^2 = xu - \frac{a}{3}, \qquad S.)$$

quæ præcise est *Relationalis* cubicæ (*Card.* §. 13. fin.) Ex hac pone x in ipsam R) ut sit:

$$\frac{a}{3u} = \sqrt[3]{(y - u^3)};$$

quæ est Resolvens.

§. 5.

Frustra hoc ad $x^4 = bx + y$ applicabis; et experiundo videbis, functionem sub radicali exstinguendam ne *Criterio* quidem debito $X = 0$ præditam esse. Sed facile rescivi, quæ functio hic addenda sit, nempe:

$$-4ux^3 + 8u^2x^2 - 8u^3x + 4u^4 = T.$$

(Unde id sciverim, infra dicam.) Sic cernes, partem resolvendæ sinistram fieri Quadratum, ut sit:

$$x^2 - 2xu + 2u^2 = \sqrt{(bx + y + T)},$$

vel exstinguendo sub radicali partes x continentes fit:

$$x^2 - 2xu + 2u^2 = \sqrt{(y + 4u^4)}. \quad H.)$$

Functionem Extinctam patet esse $bx + T - 4u^4 = 0$, vel:

$$x^2 - 2ux + 2u^2 = \frac{b}{4u}.$$

Hanc æquando cum H) habes resolventem:

$$u^6 = -\frac{y}{4}u^2 + \frac{bb}{64}. \quad (\textit{Card. } \S. 10.)$$

§. 6.

Cel. *Lagrange* (Nov. Mem. Berol. III. § 64.) docet, solutionem sexti gradus per methodum, quam ibi adoptat, ad gradum 15^{mum} ducere. Quo pacto ad hunc perveniatur, peculiari via docebo. Etsi enim sic non fit Resolutio, tamen res et Memorabilis et ob sequentia scitu Vtilis est. Sit $x^6 = ax + y$; ad obtinendam Lagrangianam istam detexi (per modum infra dicendum) utrinque addendum esse:

$$-3ux^5 + 6u^2x^4 - 7u^3x^3 + 4u^4x^2 - u^5x + u^6 = T.$$

Vides jam ad dextram exstinguendum esse:

$$ax + T - u^6 = 0. \quad L.)$$

Hanc ordino secundum x literam, et sic decompono:

$$x^2 - ux = -\frac{2}{3}u^2 + \sqrt{\left(\frac{a}{3u} + \frac{u^4}{9}\right)}. \quad R.)$$

Pro qua scribo $M = N$, ut nempe M sinistram et N dextram partem designet. Exstincta L), jam loco $x^6 = ax + y$ hanc habemus:

$$x^6 - 3ux^5 + 6u^2x^4 - 7u^3x^3 + 4u^4x^2 - u^5x + u^6 = y + u^6 \quad Q.)$$

quam cum in tres quadraticas decomponere molirer, vidi ad sinistram deesse adhuc

$$2u^4x^2 - 2u^5x. \quad S).$$

Hoc est præcise $2u^4M$; ergo adde utrinque $2u^4M = 2u^4N$. Et jam in Q) fiet:

$$x^2 - ux = -u^2 + \sqrt[3]{(y + u^6 + 2u^4N)}.$$

Hoc ipsi R) æquando, et reducendo fit:

$$u^{15} + 10au^{10} + 26yu^9 - 12a^2u^5 + 18ayu^4 - 27y^2u^3 + a^3 = o.$$

(Noli quærere, cur membra deficientia S) non ab Initio statim addiderim; sic enim relationalis L) *simul* mutata fuisset, quæ jam decompositionem Impossibilem fecisset.) — Nunc ad rem.

§. 7.

Functionis $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ denominatores quem significatum habeant, in *Cardano* exposui. (Eos autem semper considero Maximi casu, ubi $Y = o$, $X = o$.) Nunc eorundem Plenior theoria danda est. Resolvens

$$z^{m-1} = \alpha z^{m-2} \ldots \pi \quad A).$$

differentiata, ejecto z, offert criterium $Y = o$. Sed hæc, ex A) differentiando orta:

$$(m-1)z^{m-2} = \text{et cet.} \quad B).$$

denuo ad maximi statum accommodari potest, et sic, (nempe iterum differentiata, ejecto z, offeret novum criterium, quod scribo $Y' = o$. Sic ex biquadraticæ resolvente (*Card.* §. 10.) talem B) obtines:

$$3z^2 = az - \frac{aa + 4y}{16};$$

quæ offert criterium secundum $aa - 12y = o$, vel $\mathfrak{Y}' = o$. Similiter pro *Sursolidae* resolvente existet etiam Tertium criterium $\mathfrak{Y}'' = o$, pro sexto gradu Quartum $\mathfrak{Y}''' = o$, et sic porro.

Res jam transferatur in resolvendam *ipsam*. Verbi causa hanc $x^4 = ax^2 + bx + y$ differentiando pro $y = max.$ et jam x eliminando obtinemus criterium primum $A = o$, (quod coincidit cum $\mathfrak{Y} = o$, ut scimus.) Jam hæc $4x^3 = 2ax + b$ ad $b = max.$ tractata offert $27bb - 8a^3 = o$, quod ergo *Resolvendae* criterium secundum est, et $A' = o$ dicatur. Hoc $A' = o$ identicum debet esse cum *Resolventis* criterio secundo $\mathfrak{Y}' = o$ vel $aa - 12y = o$, licet immediate Diversam præ se ferant speciem ex causis, quas (*Card.* §.34.) indicavi, et casu præsenti *Reductionem* ipsius $A' = o$ ad $\mathfrak{Y}' = o$ docui loco citato, qui attente relegendus est. — Similiter jam pro $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + y$ obtinentur (ponendo successive $y = max.$ et $c = max.$ et $b = max.$) criteria *tria* $A = o$, $A' = o$, $A'' = o$.

§. 8.

Generaliter ergo pro $x^m =$ etc. atque $z^{m-1} =$ etc. existet systema Duplex criteriorum, differentiando obtinendorum, et ex æquo sibi respondentium:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{Y} = o & A = o \\ \mathfrak{Y}' = o & A' = o \\ \mathfrak{Y}'' = o & A'' = o; \text{ et porro,} \end{array}$$

ubi $A = \mathfrak{Y}$, quod semper ita habet. Systema *Dextrum* quidem, ex Resolvenda data, semper in potestate est. In *Sinistro* autem non scimus nisi solam primam $\mathfrak{Y} = o$, quæ nempe ex ista $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ habetur; ceteræ, quamvis cum respondentibus $A' = o, A'' = o, \ldots$ coincidant, sub *alia* tamen, (ut ex loco citato patet,) forma et *apparent* et apparere *debent*. Atque sic ergo quæritur, quomodo pro Resolven-

tibus ex noto criterio $\mathfrak{Y}=0$ etiam cetera $\mathfrak{Y}'=0,\ldots$ reperiantur. —

Quoniam autem resolutio non tam in *resolvente* detegenda quam in *relationali* detegenda consistit, (*Card.* §. 16. et §. 36.), hinc præcedens quæstio inprimis jam etiam ad *relationalem* $F(x, z)=0$ accommodanda est. Hæc repræsentat æquationem algebraicam; differentiata eliminando z sistit criterium primum $X=0$, (quod *solum* hactenus notum est, ex finali nempe $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$.) *Iterum* sic tractata sistet criterium secundum $X'=0$, deinde tertium $X''=0$, et sic porro. Ergo quoad resolventem et relationalem iterum Duplex oritur systema:

$$\mathfrak{Y}=0,\quad X=0,$$
$$\mathfrak{Y}'=0,\quad X'=0,$$
$$\mathfrak{Y}''=0,\quad X''=0,\ldots.$$

et oritur ergo problema tale: ex notis conjugatis primis $\mathfrak{Y}=0$, $X=0$, invenire ignotas conjugatas $\mathfrak{Y}'=0$, $X'=0$, (criteria nempe secunda,) deinge conjugatas tertias $\mathfrak{Y}''=0$, $X''=0$, et porro: Et jam ergo positis:

1.) $x^m = ax^{m-2} + ,\ldots y$

2.) $F(x, z) = 0.$

3.) $z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \ldots w,$

oritur systema *trium* conjugatarum:

1.)	2.)	3.)
$A=0$	$X=0$	$\mathfrak{Y}=0$
$A'=0$	$X'=0$	$\mathfrak{Y}'=0$
$A''=0$	$X''=0$	$\mathfrak{Y}''=0\ldots.$

§. 9.

Criteria jam secundaria ex primitivis per sequentem theoriam habentur. Quemadmodum v. c. pro $x^4 = ax^2 + bx + y$ criterium primum et secundum habetur ponendo successive $y = max.$ et $b = max.$, sic in $\mathfrak{Y}=0$ utrumque maximum

conjungi potest, et intelligetur hæc regula: Differentietur $\mathfrak{Y}=0$ pro y et b maximis, ut fiat:

$$Pdy + Qdb = 0;$$

ergo secundum leges maximi erit $P=0$, $Q=0$, ex quibus jam eliminando b obtinebis quæsitum criterium $\mathfrak{Y}'=0$. Similiter tracta ipsam $X=0$ pro x et b maximis, ut fiat:

$$Mdx + Ndb = 0,$$

ergo $M=0$, $N=0$; (conf. *Card.* pag. 13.) Hinc eliminando b obtinetur $X'=0$. Sume exempli causa ipsos $\mathfrak{Y}=0$ et $X=0$ ex *Arte Cossae* §. 9.; inde habebis:

$$48y^2 + 16a^2y + a^4 - 9ab^2 = 0, \text{ vel } P=0.$$

$$72ay + 2a^3 - 27bb = 0, \text{ vel } Q = 0,$$

unde ejecto bb fit $aa - 12y = 0$ vel $\mathfrak{Y}'=0$. Sic ergo secundum resolventis criterium obtinetur e solo *primo* criterio, Resolvente ipsa quamvis *ignota* manente! — Similiter jam loco citato ex $X=0$ obtinebis:

$$24x^5 \; 32ax^3 - 30bx^2 + 10a^2x + 9ab = 0, \text{ vel } M=0;$$

$$20x^3 - 18ax - 27b = 0, \text{ vel } N=0;$$

hinc eliminato b fit:

$$2x^2 - 3a = 0 \text{ vel } X' = 0.$$

Sic iterum constat *secundum* criterium e solo *primo*, si vel relationalis ipsa prorsus *ignota* fuisset! — (Biquadraticæ relationalis exstat *Card.* §. 13. sub finem. Sume ejus differentiale; hoc (secundum præcepta præcedentis §. 8.) iterum differentia, et elimina t; sic a posteriori valorem nostrum $X'=0$ confirmatum habebis.)

Pari modo jam pro $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + y$ in præsentia nosti nec Relationalem nec Resolventem; sed nosti criteria prima $\mathfrak{Y}=0$, $X=0$, et ex his solis derivabis conjugata Secunda et conjugata Tertia. Nempe ex $\mathfrak{Y}=0$ habes:

$$Pdb + Qdc + Rdy = 0,$$

ergo $P=0$, $Q=0$, $R=0$, unde ex prima eliminatione prævides præsto fore $\mathfrak{Y}'=0$, et e secunda porro $\mathfrak{Y}''=0$. Pariter ex $X=0$ obtines:

$Mdb + Ndc + Sdx = 0,$

ergo $M = 0$, $N = 0$, $S = 0$, ubi iterum eliminando præsto erit primo $X' = 0$, deinde $X'' = 0$.

Et sic ergo *nunc* demum naturam functionum $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ radicitus nosse dici possumus! — (Ceterum recte suspicaberis, ad criteria altiora obtinenda inservire etiam systema criteriorum $A = 0$, $A' = 0$, et cetera; et omnia omnis generis criteria ex hoc systemate, si rite tractetur, consequuntur.)

§. 10.

Jam vero casu sursolido *Completarum* (ut §. 9. opus est) functionum $Y = 0$, $X = 0$ tractatio commemorata formidolosi calculi est, et habes ergo hic utique Theoriam placentem, sed calculos non placentes; nec improbandum, si quis resolutione sursolidæ malit *carere*, quam eam nimio suo ingenii detritu emtam habere. Sed nemo in his desudet, et satis est utique, *Conceptum* rei perspectum esse. Nam (ut omittam, quod longe facilior ad criteria $X' = 0$ et $X'' = 0$ perveniendi methodus infra exponatur), cognitio criteriorum solorum ad $F(x, z) = 0$ obtinendam nondum sufficit. Quare deserentes jam hanc materiam, (in qua brevitatis causa sexcenta pulchra omisi,) ad Aliam rem transimus, non injucundam ceteris mortalibus futuram, et Fato Cossæ non minus decisivam, quam ista $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ fuerat.

§. 11.

Sit $y = X$, nempe functio ipsius x; ergo pro incrementis $y + \Delta$ et $x + w$ fit:

$$\Delta = \frac{wdX}{dx} + \frac{w^2 d^2 X}{2dx^2} + \ldots.$$

et ipso Δ iterum evanescente:

$$0 = \frac{dX}{dx} + \frac{wd^2 X}{2dx^2} + \ldots.$$

Sic pro $x^2 - ax = y$ obtinetur:

$w + 2x - a = 0.$ H.)

ex hac pone x in resolvendam, unde:

$$w = \sqrt{(aa+4y)}.$$

Ergo in H) habetur x. Transimus ad $x^3 - ax = y$; hic ex $\Delta = 0$ obtinetur:

$$w^2 + 3xw + 3x^2 = a. \qquad H.)$$

„Hanc (et omnes similes, constanter per H designandos) probe tene; nam habent miras virtutes." — Jam cum valor w sit prorsus indeterminatus, altissimam dignitatem $3x^2$ *annihilare* possumus ponendo $w = x + nt$; sic fit:

$$(n^2+3n+3)\, x^2 + (2n+3)\, tx + t^2 = a; \qquad R.)$$

ergo sit $n^2+3n+3=0$, hinc:

$$t^2 = -xt\sqrt{-3} + a,$$

in qua si ponatur mt pro t, (est autem m ille noster Arbitrarius,) videbis pro $m = -\sqrt{-3}$ prodire

$$t^2 = xt - \frac{a}{3} \text{ (Card. §. 13.)}$$

nempe Relationalem cubicæ! — Jam porro pro $x^4 - bx = y$ ex $\Delta = 0$ sequitur:

$$w^3 + 4w^2x + 6wx^2 + 4x^3 = b. \qquad H.)$$

Ut jam evanescat x^3, opus est iterum positione $w = x + nt$, unde:

$$(n^3+4n^2+6n+4)x^3 + (3n^2+8n+6)x^2t + (3n+4)xt^2 + t^3 = b.$$

Ergo $n^3+4n^2+6n+4=0$, (quam cum omnibus similibus dicemus $N=0$.) Hæc $N=0$ offert $n=-2$; ergo:

$$t^3 = 2xt^2 - 2x^2t + b,$$

vel ponendo $2t$ pro t fit:

$$t^3 = xt^2 - \frac{xxt}{2} + \frac{b}{8} \text{ (Card. §. 10.)}$$

nempe Relationalis Biquadraticæ!

(Hanc multiplica per $8x$, tum intelliges, unde supra §. 5. resciverim, quænam functio ad dextram Evanescere debuerit.) —

§. 12.

Hæc operatio non continuatur ad Sursoli'am. Pro $x^5 = cx + y$ fit:

$$w^4 + 5w^3x + 10w^2x^2 + 10wx^3 + 5x^4 = c. \qquad H.)$$

ad exstinguendam x^4 si ponas $w = x + nt$, fit:

$$n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 5 = 0, \text{ vel } N = 0.$$

Intuere nunc omnes nostras $N = 0$; agnosces Legem, nempe coefficientes Binomii. Ad naturam earum detegendam pone $n = m - 1$, sic fit:

$$m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = 0.$$

et in casibus §. 11. similiter:

$$m^3 + m^2 + m + 1 = 0.$$

$$m^2 + m + 1 = 0.$$

Has constat oriri ex $m^u - 1 = 0$, si per $m - 1 = 0$ dividatur. Sic ergo methodus altissimam ipsius x dignitatem exstinguendi ducit ad $m^u - 1 = 0$, quæ sectionem circuli exprimit. — Sursolido ergo casu in ista $n = -1 + m$ designat m radicem ex unitate sursolidam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Positis ergo his quatuor ex $m^5 - 1 = 0$ radicibus, (quorum ea virtus est, ut sit $m = \alpha$, $m^2 = \beta$, $m^3 = \gamma$, $m^4 = \delta$,) ex H) nostra et ex postitione $w = x + (m - 1)t$ emergentem sic exprimi cernes:

$$t^4 + (1 + 4\alpha)xt^3 + (1 + 3\alpha + 6\beta)x^2t^2 + (1 + 2\alpha + 3\beta + 4\gamma)x^3t = c.$$

Hanc jam non esse veram sursolidæ relationalem, hoc demonstrare facillimum, at inutile, foret.

§. 13.

Ergone etiam *haec* tam præclara theoria Desperanda est? — Minime. — „Sed adeo cossæ *Salus* in istis H) æquationibus vertitur." Et considerandum est hoc H) systema tanquam pretiosissima *Margarita* quædam, ut olim aliquando clare patebit. — An putas enim Fallere posse formam $\Delta = \frac{wdX}{ax} + ..$ qua utimur? — Tam Præclaram istam, et consensu totius generis humani indubitabilem? — Unde scis enim, in relationalibus ipsam x esse semper duabus dignitatibus minorem quam in resolvenda? (*Hoc* enim præcise est, quod positione $w = x + nt$ efficitur.) Unde scis, quod v. e.

in

in sursolidæ relationali x non ascendat ultra x^3? Nonne hæc mera *hypothesis* est? Annon casu hoc potius aliquam *Irrationalitatem* in relationalis coefficientibus adesse suspicaberis? Denique vidisti, positionem $w=x+nt$ ducere ad istas $N=0$, quas reduximus ad $m^u-1=0$. „Manifesto igitur, æquationes H) ad positionem $w=x+nt$ accommodare, nihil aliud est, quam ad istam radicum *unitatis* legem relabi, a Langragio dudum explosam." — Huic rei illustrandæ opportune famulat exemplum §. 6.; nempe pro $x^6=ax+y$ sume suam competentem H). In hac per $w=x+(m-1)t$ devenimus ad hanc:

$$m^5+m^4+m^3+m^2+m+1=0,$$

sive $N=0$. Tales autem impares gradus habent semper divisorem $m+1=0$; sic fit $w=x-2t$. Quæ hac substitutione loco ipsius H) obtinetur, si per x multiplicatur, tum spectandam sistit Eam functionem, quæ supra §. 6. ad dextram Evanuerat. Ex *his* ergo nempe fundamentis eam functionem desumseram, quæ igitur non est nisi vera H) æquatio, per falsam positionem $w=x-2t$ devastata. Sic ergo ipsam H) ad æquationem $m^6-1=0$ seu ad unitatis radicum legem detorquens, effectum Eundem habui, quem Lagrangius, Eadem lege radicum ibi usus habuit, nempe 15^{mum} gradum.

§. 14.

Hujus H) systematis jam, (quod a nobis tantopere prædicatur,) Ea princeps virtus est, quod omnibus omnis generis veris *Criteriis* præditum est! — Sume (§. 11.) ipsius $w^2+3xw+3x^2=a$ differentiale pro $dx=0$; ejecto inde w fiet $3x^2-4a=0$, vel $X=0$, nempe *Criterium Relationalis.* Similiter sume pro biquadratica *Completa* competentem H,) quæ sic habet:

$$w^3+4xw^2+(6x^2-a)w+4x^3-2ax=b. \qquad H).$$

Ex hac et ejus differentiali obtinebis criterium primum $X=0$, ut in *Arte Cossae* §. 9. cernitur. Jam hujus H) differentiale:

$$3w^2+8xw+6x^2=a,$$

si *denuo* sic tractetur, prodit $2x^2-3a=0$, vel $X'=0$, nempe criterium Secundum. — Porro jam ipsius $x^5=cx+y$ competens H) æquatio §. 12, si tractatur ut dixi, offeret (jam tandem a priori) *verum* illud (*Card.* §. 14.) criterium $X=0$. — Quod quam faustum sit, Lectori persentiendum relinquo, habere nempe ex Vero fonte H) formulam Veri criterii; omni simul Hypothesi in æternum Exulare jussâ. Ceterum vera criteria ne a Devastatis quidem formis recedunt; ut facili experimento ex (§. 11. R) disces. Ex hac R) nempe et ejus differentiali $2t+(2n+3)x=0$ ejecto t fit $3x^2-4a=0$. „Litera nempe n, quæ mediante $w=x+nt$ introducta fuerat, ex calculo penitus *Abit.*" Idem jam pro altioribus gradibus ita contingit, et sic ergo perdurat Criterium.

§. 15.

Quodsi nunc ipsam H) pro *completa* sursolida adornas, obtinebis criteria reliqua $X'=0$, $X''=0$. Calculi prolixi non in hoc scriptum cadunt, ergo rem sic paucis describo. Ipsa H) ter successive pro $dx=0$ differentietur; sic fit $H=0$, $dH=0$, $d^2H=0$, $d^3H=0$. Ex 1) et 2) ejecto w, habetur $X=0$; porro ex 2) et 3) sequitur $X'=0$. tandem ex 3) et 4) sequitur $X''=0$. Nos in ultimo acquiescimus; pro $d^2H=0$ et $d^3H=0$ nempe habetur:

$$6w^2+15xw+10x^2=a \text{ et}$$

$$4w+5x=0.$$

hinc ejecto w fit:

$$5x^2-8a=0 \text{ vel } X''=0.$$

Quo sensu jam *Generales* termini in hoc negotio existant, levi patebit specimine. Si præcedens operatio applicatur ad

sextum gradum, pervenitur ad criterium ultimum $3x^2 - 5a = 0$ vel $X''' = 0$. (Labor parvus est; nam completa *H*) continuo differentiatur, donec existit quadratica.) — Jam inspice æquationis Cubicæ criterium *primum*, (quod simul *ultimum* est,) porro Biquadraticæ *Secundum*, Sursolidæ *Tertium*; verbo, relationalium criteria *ultima*. Sic cernes,

pro cubica, $X = 0$ esse $3x^2 - 4a = 0$.
— biq. $X' = 0$ esse $4x^2 - 6a = 0$.
— sursol. $X'' = 0$ esse $5x^2 - 8a = 0$.
— sexta, $X''' = 0$ esse $6x^2 - 10a = 0$.

Exinde pro $x^m = ax^{m-2} + \dots y$ deducis criterium relationalis ultimum hoc:

$$mx^2 - 2(m-1)a = 0.$$

Quia casu cubico ultimum criterium hoc simul etiam *primum* est, hinc fit, ut pro $m = 2$ sequatur $x^2 = a$, quasi infimum *resolvendae* genus.

§. 16.

Explicata hac ipsius *H*) Criteriali virtute, subjungere pauca consultum est. Ab æquatione *H*), quæ dici potest relationalis *Tayloriana*, ad relationalem Actualem $F(x, z) = 0$, (ex qua nempe *Resolvens* habetur,) vidimus Transitum $w = x + nt$, pro Surdesolida non amplius valiturum. Conceptum ergo talis transitus, (*citra* tamen sursolidam subsistentes,) nunc designabimus.

Casu cubico valet sequens operatio. Ex $x^3 = ax + y$ et ejus Tayloriana $w^2 + 3xw + 3x^2 = a$ eliminando x fit:

$$3y\sqrt{3} = (a - w^2)\sqrt{(4a - w^2)}. \qquad M.)$$

Sit $\sqrt{(4a - w^2)} = w\sqrt{-1} + u$, hinc:

$$w = \frac{4a - uu}{2u\sqrt{-1}}. \qquad Q.)$$

Sic in *M*) fiet:

$$3y\sqrt{3} = \frac{u^6 + 64a^3}{8u^3}. \qquad R.)$$

quam ponendo $u^3 = nz$ veram resolventem esse agnosces. Hinc jam ex R) habes u, ergo in Q) habes w, ergo in ipsa H) habes x. Sed hæc operatio est *cubicae* tantum domestica. Ergo commemoratum transitum quære immediata *Rationalisatione Taylorianae.* Casu cubico est $w^2 + 3xw + 3x^2 = a$; hæc resolvatur quoad x, deinde terminus $\sqrt{(4a - w^2)}$ rationalisetur ut vix ante fecimus. Obtinebitur:

$$u^2 = \frac{4xu\sqrt{-3}}{\sqrt{3}+\sqrt{-1}} + \frac{4a(\sqrt{3}-\sqrt{-1})}{\sqrt{3}+\sqrt{-1}};$$

quam ponendo $u = nt$ in hanc formam reduces:

$$t^2 = xt - \frac{a}{3}. \quad (\textit{Card. §. 13.})$$

Sic vides a relationali *Tayloriana* ad *Actualem* esse Rationalisatione sola Transitum factum!

§. 17.

Porro jam pro $x^4 = bx + y$ talem H) habemus:

$$4x^3 + 6wx^2 + 4w^2x + w^3 = b. \qquad H.)$$

quæ ut quoad x resolvatur, eliminandum est membrum secundum, ponendo $x = u - \frac{w}{2}$, sic fit:

$$u^3 = -\frac{w^2}{4}u + \frac{b}{4}. \qquad T.)$$

vel resolvendo:

$$2u = \sqrt[3]{\left(b + \sqrt{\left(b^2 + \frac{w^6}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(b - \sqrt{\left(b^2 + \frac{w^6}{27}\right)}\right)}. \qquad S.)$$

quod ut rationalisetur, ad ipsam T) redeundum est, et investigandum, qua conditione hæc T) radicem rationalem $u = t$ obtineat. Ponatur ergo:

$$-\frac{w^2}{4} = \frac{mt^3 + nb}{t},$$

quo in T) imposito, factoque simul $u = t$, patebit fieri debere $m = 1$, $n = -\frac{1}{4}$. Sic fit:

$$w^2 = \frac{b-4t^3}{t}. \qquad P.)$$

Hujus cubo in S) imposito fit:

$$2u = \sqrt[3]{\left(b + \frac{b+8t^3}{3t}\sqrt{\frac{b-t^3}{3t}}\right)} + \sqrt[3]{\left(b - \frac{b+8t^3}{3t}\sqrt{\frac{b-t^3}{3t}}\right)}. \quad N.)$$

Nondum patet, quomodo hæc forma summam rationalem habeat. Sed pone $2u = T$, ut habeas formam $T = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Ergo fit:

$$T^3 = 3T\sqrt[3]{AB} + A + B.$$

Jam solus obtutus docet, in N) esse $A + B = 2b$. Similiter levis calculus docet, in N) esse:

$$\sqrt[3]{AB} = \sqrt[3]{\frac{64t^9 - 48bt^6 + 12b^2t^3 - b^3}{27t^3}} = \frac{4t^3 - b}{3t};$$

Sic loco istius $T^3 = \ldots$ (reposito iterum $2u = T$) habetur:

$$u^3 = \frac{4t^3 - b}{4t}\,u + \frac{b}{4}.$$

quæ habet radicem $u = t$. Ergo summa irrationalis in N) efficit $2t$; quod ergo comperimus, etsi partes $\sqrt[3]{A}$ et $\sqrt[3]{B}$ separatim rationalisari non possint, sed earum tamen *Summa*, ut vidimus. — Sic igitur in $x = u - \frac{w}{2}$ ex P) habetur:

$$x = t - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b-4t^3}{t}}; \text{ unde fit:}$$

$$t^3 = xt^2 - \frac{x^2t}{2} + \frac{b}{8}. \quad (\textit{Card.}\ \S.\ 10.)$$

Ergo vidimus, quod *hic* quoque a *Tayloriana* ad *Actualem* relationalem quæsitus Transitus factus est Rationalisatione sola!

§. 18.

Operæ pretium est monere, quod etiam $x^3 = ax \mp y$ per viam præcedentem rationalisetur. — Quid ars Diophanti pro $xx = ax + y$ præstat? Jubet ponere:

$$\sqrt{\left(\frac{aa}{4}+y\right)} = \frac{a}{2}+u\text{, hinc } a=\frac{y-u^2}{u}.$$

Sic fit: $x^2=\frac{y-u^2}{u}\,x+y.$ $\quad A.)$

in qua est $x=-u$. Hoc transferemus jam ad $x^3=ax+y$. Resolvendo fit:

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{y}{2}+\sqrt{\left(\frac{yy}{27}-\frac{a^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{y}{2}-\sqrt{\left(\frac{yy}{4}-\frac{a^3}{27}\right)}\right)}.$$

In hac posito $a=\frac{u^3-y}{u}$ fit:

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{y}{2}+\frac{y+2u^3}{6u}\sqrt{\frac{4y-u^3}{3u}}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{y}{2}-\frac{y+2u^3}{6u}\sqrt{\frac{4y-u^3}{3u}}\right)}.\quad Q.)$$

quod scribo $x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$, ergo

$$x^3=3x\sqrt[3]{AB}+A+B.$$

Primo vides, esse $A+B=y$, et porro reperies $\sqrt[3]{AB}=\frac{u^3-y}{3u}$, ergo

$$x^3=\frac{u^3-y}{u}\,x+y;\quad B).$$

quæ habet radicem $x=u$. Vides igitur, casu cubico præcise talem B) existere, qualis casu quadratico æquatio A) existit. Quo jure igitur Diophanti artem ad quadraticas restringimus? (De altioribus gradibus commodius alio tempore agitur.) Sic ergo in Q) summa utriusque membri est $=u$; atque si B) per $x-u=0$ dividatur, obtinebis Reliquas radices, quæ sic saltim a radicali *cubico* liberantur. — Quod ad irrationalia altiora (ut $\sqrt{1-u^4}$ et cetera) *immediate* occurrentia, quemadmodum in *differentialibus* fit, pertinet, in eam rem præclara quædam meditor; sed nondum scio, utrum eventus responsurus sit. Saltim dolendum, quod rectificatio Conicarum, cujus in *Arte Cossae* §. 9. mentionem injeci, nondum in potestate calculi est.

§. 19.

Sed hic subsisto. Pro $x^5 = cx + y$ habes Taylorianam:

$$5x^4 + 10wx^3 + 10w^2x^2 + 5w^3x + w^4 = c.$$

Ut quoad x resolvatur, eliminandum est membrum secundum, ponendo $x = u - \frac{w}{2}$. Sic obtines:

$$5u^4 + \frac{5}{2} w^2u^2 + \frac{w^4}{16} = c. \qquad R.)$$

Aequatiuncula *quadratica*, mirique effectus, ubi *rite tractetur*! — Resolutio præbet formam $u = \surd(A + \surd B)$. Hoc pone $= \surd M + \surd N$; sumendo quadrato æquabis rationale rationali, irrationale irrationali, sic cernes formam:

$$u = \surd(P + \surd Q) + \surd(P - \surd Q),$$

quæ formæ (§. 17. *S*) affinis est. Occasione ipsius *R*) autem commonefacio de nova Taylorianæ (præter Criterialem) virtute, quod nempe per nostram $x = u - \frac{w}{2}$ transformata, continuo Alternas ipsius u dignitates *amittat*, ut igitur pro resolvendæ gradu $2n + 1$ ipsa *R*) ad gradum n redeat; ut hoc ipso istius *R*) exemplo cernis. Ipsius w autem gradus impares continuo Evanescunt! Sic e *sextae* $x^6 = ax + y$ Tayloriana ponendo $x = u - \frac{w}{2}$ Talem *R*) obtines:

$$6u^5 + 5w^2u^3 + \frac{3}{8} w^4u = a.$$

Neque etiam prætermittes observare ipsius *H*) systematis transformationem ope positionis $w = u - x$. Sic piodit forma:

$$x^m + ux^{m-1} + u^2x^{m-2} + \ldots = a.$$

Sed satis est. — Quæ premimus, inprimis pulchra sunt, nec tamen hujus loci. Principia tecte in his nostris continentur. Loqui autem de Anagrammate nostro, nec vacat, nec e re videtur.

PYTHAGORAS SUEVUS.

SIVE

DE THEOREMATIS PYTHAGORICI ORDINE ALTIORI.

AUCTORE

M. GUILIELMO LUDOVICO CHRISTMANN,
PASTORE HEIMERTINGAE.

STUTTGARDIAE
IN COMMISSIS BIBLIOPOLII SATTLERIANI
1824.

Scripta alia mathematica ejusdem Auctoris:

Apollonius Suevus, **sive tactionum problema nunc demum restitutum. 1821.**

Aetas argentea cossae. **1820.**

Atlantis cossica. **(Quae nondum typis excusa est.)**

§. 1.

Theorema pythagoricum $aa + bb = cc$, si ad geometriam infinite parvorum adplicatur, scribi solet $dx^2 + dy^2 = ds^2$. Et hanc formulam dico pythagoricum ordinem *primum* seu *infimum*. — Jam vero existunt superiores etiam categoriae $d^2x^2 + d^2y^2$, et sic deinceps; ad quas quamvis Geometrae interdum delapsi sint, nemo tamen mortalium, quantum quidem sciam, earum veram expressionem competentem, quae fit nempe *per angulum curvedinis*, umquam exhibuit. — Si angulus hic sit $= d\phi$, quaeritur ergo functio:

$$F\phi = d^nx^2 + d^ny^2;$$

vel pro curvis *duplicis* curvaturae, quaeritur:

$$F\phi = d^nx^2 + d^ny^2 + d^nz^2.$$

In qua theoriâ, (quod in vindicias tituli interim satis est,) ordines pythagorici superiores sponte se manifestant. — Nec tamen haec sola geometrica me ad scribendum compulissent, nisi simul pervidissem, categorias has pythagoricas in tota *naturâ* divinam quandam personam sustinere. Quum ergo res inprimis ad Mechanicam spectet, necesse fuit principia Mechanicae claro ordine praemittere, tum quia ad intellectum *sequentium* id requirebatur, tum quia gravissimas quasdam observationes subjungere in animo est. — Ceterum scribemus velocitatem $= V$, tempus $= t$, potentias $= P, Q, \ldots$ et spatium $= s$. At si corporis motus projiciatur in axes tres inter se normales *Maclaurini*, tum via secundum hos axes erit $= x, y, z$.

§. 2.

Formula *dynamica* $dV = Pdt$, si cum formula *phoronomica* $ds = Vdt$ combinetur, motum cujusvis puncti *determinare* censenda est. Nam alia motus principia praeter haec duo, in mundo nostro non existunt. — Sunt autem, qui de formula velocitatum *virtualium* loquuntur cum praeconio, nempe eo interdum sensu, ut hanc *majoris* efficaciae quam vulgarem canonem $dV = Pdt$ censeant. Quo praejudicio penitus illos exuemus. Nam quod per *virtualem* formulam resolvitur problema, idem etiam per *vulgarem* dynamicum canonem resolvitur. Virtualis formula non est novum *principium* (quo tamen celebrari solet nomine,) sed est unice commodius *vehiculum*, et canonis vulgaris merum *surrogatum* et imo illius mera *soboles*; ut jam ipso facto patebit. — Ceterum si circa nobilissimam scientiarum, (quae motuum leges temperat a sidere usque ad atomum,) errores vel praejudicia reformabimus, utique non male meruisse videbimur. — Trahatur jam (Fig. 1,) punctum N a vi P versus C, sit $NC = p$, et fiat motus ab N ad M, in via $NM = ds$. Urgebitur punctum ab vi tangentiali $T = P \cos \varphi$, si nempe $MNL = \varphi$. Haec vis T dicitur *projectio* istius P. Habetur pro hoc motu:

$ds = Vdt$ et $dV = Pdt \cos \varphi$. Unde fit:

1. $VdV = Pds \cos \varphi$.

Describe ex C arcum MR, erit $NR = - dp$. Ergo:

2. $dp = - ds \cos \varphi$. Unde ex (1) et (2) fit:

3. $VdV + Pdp = 0$.

Quae est jam formula *virtualis* pro motu puncti! Et est ergo ea leve corollarium ex vulgari canone (1), mediante triviali substitutione $dp = - ds \cos \varphi$.

Urgeatur jam N ab alia insuper vi Q, cujus centrum sit in quocunque plano locatum pro lubitu, directio autem hujus novae vis, includat cum elemento ds angulum $= \psi$. Ergo punctum N per viam ds transcurrens animatur non

tantum a vi tangentiali priori $= P \cos \varphi$, sed insuper a vi tangentiali $= Q \cos \psi$. Ergo loco istius $dV = Pdt \cos \varphi$ habetur effectus accelerationis totalis hic:

4. $dV = (P \cos \varphi + Q \cos \psi)\, dt.$

Ergo si recta ab N ad centrum potentiae Q dicatur $= q$, erit ut supra:

5. $dq = - ds \cos \psi.$

Jam ex (4) et ex $ds = Vdt$ eliminando dt fit:

6. $VdV = (P \cos \varphi + Q \cos \psi)\, ds.$

Inde ope istarum (2) et (5) ejectis cosinibus fit:

7. $VdV + Pdp + Qdq = 0.$

Et sic jam sponte pro quotcunque potentiis fit:

8. $VdV + Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = 0.$

Quae est ergo virtualis formula generalis pro motu puncti; et obtinetur ea, ut vidimus, ex *vulgari* canone $dV = Pdt$, mediante triviali *Metamorphosi* quadam. Ideoque praecedens *canon* et ista *virtualis* formula habendi sunt quoad efficaciam pro *synonymis* et prorsus *identicis*. — Restat jam ut virtualem formulam pro toto aliquo *systemate* corporum in medium sistam; eritque ea, ut mox patebit, physiognomiae *sequentis:*

9. $M'V'dV' + M''V''dV'' + \ldots Pdp + Qdq + \ldots = 0,$

in qua per $P, Q \ldots$ jam vires *motrices* intelligendae sunt et massa $M', M'', \ldots$ ad suam respective velocitatem $V', V'' \ldots$ spectat. — Haec (9) docet autem, quod pro *aequilibrii* casu (id est pro Statica) praecise *duo* principia existant. Nempe ob motum in aequilibrio exstinctum, loco istius (9) habetur:

10. $M'V'dV' + M''V''dV'' + M'''V'''dV''' + \ldots = 0,$

unde et pars *residua* fit $= 0$, id est:

11. $Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = 0.$

Loco istius (10) autem scribi manifesto potest:

12. $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \ldots = \text{max.}$

Hanc staticae formulam generalem primus exhibuit nec

motrix $= Q$, et inter M'', M''' intercedet motrix $= R$. Cum ergo massa M' urgeatur a duabus externis motricibus P et Q, versus massas nempe M'' et M''', ergo pro hac massa M' habetur (per §. 3. nro. 3. et §. 2. nro. 7.) specialis aequatio:

$$M'V'dV' + Pdp' + Qdq' = 0.$$

Et similes ergo pro massis M'', M''' oriuntur speciales respective:

$$M''V''dV'' + Pdp'' + Rdr' = 0.$$
$$M'''V'''dV''' + Qdq'' + Rdr'' = 0.$$

Quibus tribus aequationibus addendis oritur jam aequatio *totalis*:

$$M'V'dV' + M''V''dV'' + M'''V'''dV''' + Pdp + Qdq + Rdr = 0.$$

Quâ continetur problema *trium corporum*. — Ex hoc processu sponte fit continuatio ad quatuor vel ad n massas.

§. 5.

Postquam formula Mechanicae catholica jam in medio posita est, ad *variationum* negotium transimus; et agemus de illis clarius quam forsan quisquam. Immo vero illas ipsis *oculis* Lectorum intuendas objiciam. Priusquam nempe formula virtualis in usu fuit, vim corpus urgentem P decomponere solebant in vim *tangentialem* $= T$, et vim *normalem* $= N$, eratque (Fig. 1.):

$$T = P \cos \varphi; \quad N = P \sin \varphi, \quad (\text{si } MNR = \varphi.)$$

Hae *laterales* enim vires T et N aequipollent vi totali P. — Quodsi nunc *respicere* velis, (§. 2. mox ab initio,) tum pervidebis, quod mihi hactenus cum sola vi *tangentiali* res fuerit. Projeci nempe vim totalem P in viam ds, quo fit $T = P \cos \varphi$, ideoque $dV = Pdt \cos \varphi$. Et ex hac sola igitur formulam *virtualem* derivavi. Unde patet, quod virtualis formula per se soli *tangentiali* vi aequipollet, et virium T et N solam *priorem* exprimit. Unde fit jam, ut virtualis formula (§. 4. sub fin.) per se nondum ad resolutio-

nem sufficiat, sed vis insuper *normalis* = N concurrere debet, cujus mensuram esse constat: $N = \frac{VV}{2gr}$, (si r = radius osculi.) — Jam quaeso probe attende. — Quoniam nempe expresse hae *normales* vires, facilitatem resolutionis remorari solent, (et id jam ob radii *osculi* praesentiam,) ideo Analystae in solâ *virtuali* formula subsistere consultum duxerunt, et eam (quae per se soli *tangentiali* vi respondet,) ita *transformare* laborarunt, ut simul vim etiam *normalem* ejusque effectum in se contineat. Et id jam praecise per *variationes* praestatur, ut videbimus. — Vis normalis N, *velocitatem*, corporis non mutat, mutat autem illius *directionem*, id est, viam *incurvat*. (Fig. 4.) — Nempe a vi tangentiali transfertur corpus ab A versus B; sed a vi *normali* interim retrahitur versus C, (centro circuli osculantis in O existente.) Jam si Q sit virium centrum, posito $AQ = p$, ex (§. 2. nro. 3.) habetur:

$$VdV + Pdp = 0, \text{ vel ob } V = \frac{ds}{dt} \text{ fit:}$$

$$1.)\quad \frac{dsd^2s}{dt^2} + Pdp = 0.$$

Et jam variationes ante *oculos* exhibebimus. Dum nempe corpus a vi tangentiali promovetur ab A versus B per elementum $AB = ds$, eodem tempore a vi normali retrahitur a B versus C, ita ut actualiter percurratur non elementum $AB = ds$, sed elementum $AC = \delta s$. Et eodem simul actu, elementum $BH = dp$ mutatur in elementum $CK = \delta p$. Vel quocunque demum alio modo orientes has discrepantias scribendo exprimas. Certe ad *oculos* interim patet, quod praecedenti (1) virtuali formulae, a virium normalium effectu indesinenter *mutatio* inducitur. Ceterum ex nota proprietate radii osculi habetur proportio:

$$BC : AC = AC : OC \text{ vel}$$

$$BC : ds = ds : r,$$

motrix $= Q$, et inter M'', M''' intercedet motrix $= R$. Cum ergo massa M' urgeatur a duabus externis motricibus P et Q, versus massas nempe M'' et M''', ergo pro hac massa M' habetur (per §. 3. nro. 3. et §. 2. nro. 7.) specialis aequatio:

$$M'V'dV' + Pdp' + Qdq' = 0.$$

Et similes ergo pro massis M'', M''' oriuntur speciales respective:

$$M''V''dV'' + Pdp'' + Rdr' = 0.$$
$$M'''V'''dV''' + Qdq'' + Rdr'' = 0.$$

Quibus tribus aequationibus addendis oritur jam aequatio *totalis*:

$$M'V'dV' + M''V''dV'' + M'''V'''dV''' + Pdp + Qdq + Rdr = 0.$$

Quâ continetur problema *trium corporum*. — Ex hoc processu sponte fit continuatio ad quatuor vel ad n massas.

§. 5.

Postquam formula Mechanicae catholica jam in medio posita est, ad *variationum* negotium transimus; et agemus de illis clarius quam forsan quisquam. Immo vero illas ipsis *oculis* Lectorum intuendas objiciam. Priusquam nempe formula virtualis in usu fuit, vim corpus urgentem P decomponere solebant in vim *tangentialem* $= T$, et vim *normalem* $= N$, eratque (Fig. 1.):

$$T = P \cos\varphi; \quad N = P \sin\varphi, \quad (\text{si } MNR = \varphi.)$$

Hae *laterales* enim vires T et N aequipollent vi totali P. — Quodsi nunc *respicere* velis, (§. 2. mox ab initio,) tum pervidebis, quod mihi hactenus cum solâ vi *tangentiali* res fuerit. — Projeci nempe vim totalem P in viam ds, quo fit $T = P \cos\varphi$, ideoque $dV = Pdt \cos\varphi$. — Et ex hac solâ igitur formulam *virtualem* derivavi. — Unde patet, quod virtualis formula per se soli *tangentiali* vi aequipolleat, et virium T et N solam *priorem* exprimat. Unde fit jam, ut virtualis formula (§. 4. sub fin.) per se *nondum* ad resolutio-

nem sufficiat, sed vis insuper *normalis* $= N$ concurrere debet, cujus mensuram esse constat: $N = \frac{VV}{2gr}$, (si r = radius osculi.) — Jam quaeso probe attende. — Quoniam nempe expresse hae *normales* vires, facilitatem resolutionis remorari solent, (et id jam ob radii *osculi* praesentiam,) ideo Analystae in solâ *virtuali* formula subsistere consultum duxerunt, et eam (quae per se soli *tangentiali* vi respondet,) ita *transformare* laborarunt, ut simul vim etiam *normalem* ejusque effectum in se contineat. Et id jam praecise per *variationes* praestatur, ut videbimus. — Vis normalis N, *velocitatem*, corporis non mutat, mutat autem illius *directionem*, id est, viam *incurvat*. (Fig. 4.) — Nempe a vi tangentiali transfertur corpus ab A versus B; sed a vi *normali* interim retrahitur versus C, (centro circuli osculantis in O existente.) Jam si Q sit virium centrum, posito $AQ = p$, ex (§. 2. nro. 3.) habetur:

$VdV + Pdp = 0$, vel ob $V = \frac{ds}{dt}$ fit:

1.) $\frac{dsd^2s}{dt^2} + Pdp = 0$.

Et jam variationes ante *oculos* exhibebimus. Dum nempe corpus a vi tangentiali promovetur ab A versus B per elementum $AB = ds$, eodem tempore a vi normali retrahitur a B versus C, ita ut actualiter percurratur non elementum $AB = ds$, sed elementum $AC = \delta s$. Et *eodem* simul actu, elementum $BH = dp$ mutatur in elementum $CK = \delta p$. Vel quocunque demum alio modo orientes has discrepantias scribendo exprimas. Certe ad *oculos* interim patet, quod praecedenti (1) virtuali formulae, a virium normalium effectu indesinenter *mutatio* inducitur. Ceterum ex nota proprietate radii osculi habetur proportio:

$BC : AC = AC : OC$ vel

$BC : ds = ds : r$,

ergo sagitta $BC = \frac{ds}{r}$ est infinite parvum *secundi* ordinis; hoc est sagitta BC *evanescit* respectu elementi AC. Ergo (quod Lagrangius Dynam. Sect. 3. nro. 9. p. 213 expresse quoque monet,) virtualis formula (1) retineri semper salvâ veritate geometricâ potest. Quae autem de motu *unius* corporis dico, ea sponte ad integrum *systema* accommodantur; nam satis est mihi, variationum veras quasi natales ad oculos demonstrare, id quod jam paucissimis verbis *transigetur*. Nam in justo variationum conceptu, ut dicam quod res est, omnis eruditorum orbis praeeunte Gallia hallucinatus esse videtur. Nam sublimibus istis Gallis facilius est, ut videtur, in analysi magnas res *invenire*, quam inventa clare *exponere*.

Aequatio (1) revocetur ad axes $QF = x$, $QG = y$. Sed haec virtualis aequatio aequipollet, ut vidimus, unice *tangentiali* vi T, et ab hac solâ vi T corpus *absolute* non aliter nisi per *tangentem* $AB = ds$ transfertur, ergo *hic* praecise motus (nempe per $AB = ds$) in istos axes projiciendus est. Et *hunc* nempe praecise motum, neque alium, *virtualis* (1) formula exprimit. Habetur jam $pp = xx + yy$, ergo:

$$dp = \frac{xdx}{p} + \frac{ydy}{p}; \text{ ergo}$$

$$Pdp = \frac{x}{p} Pdx + \frac{y}{p} Pdy, \text{ id est, (si } AQF = \theta\text{);}$$

$$Pdp = Pdx \cos\theta + Pdy \sin\theta.$$

Jam vero $P \sin\theta$ et $P \cos\theta$ manifesto sunt istius P projectiones ad y et x respective, ergo si hae projectae vires dicantur $= Y$ et X, habetur:

$$2.)\quad Pdp = Xdx + Ydy.$$

Denique dum corpus per illud praecise elementum $AB = ds$ movetur, coordinatae x et y incrementa dx et dy

capiunt, ergo pro dicto praecise elemento ds fit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, unde fit;

3.) $dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y$.

His (2) et (3) in istam (1) subrogatis fit:

$$4.)\quad \frac{dxd^2x}{dt^2} + \frac{dyd^2y}{dt^2} + Xdx + Ydy = 0.$$

Atque *haec* ergo formula exponit motum a solâ *tangentiali* vi oriundum, per elementum nempe $AB = ds$. — Jam autem vis etiam *normalis* accedat; hac ergo nempe cooperante corpus *non* ad B, sed ad C defertur. Ergo si ad punctum B pertinebant incrementa dx et dy, pertinebunt ad punctum C *alia* necessario incrementa, quae dicamus $= dx'$, dy'. Ergo accedente vi normali describuntur secundum axes *non* isti dx et dy, sed isti novi dx' et dy', ergo ut hic motus compositus ad axes projiciatur, necesse est in praecedente (4) substituere dx' et dy' loco dx et dy. Sic fit;

$$5.)\quad \frac{dx'd^2x'}{dt^2} + \frac{dy'd^2y'}{dt^2} + Xdx' + Ydy' = 0.$$

Quoniam elementorum dx' et dy' omnino est quaedam *discrepantia* a prioribus, ponatur utcunque:

$dx' = dx + \delta x$

$dy' = dy + \delta y$.

Quum autem sagitta BC, quae hanc discrepantiam gignit, sit *secundi* ordinis, ut vidimus, ergo via projecta dx' et dy' ab viis prioribus dx et dy infinite *parum* discrepat, id est, variationes δx, δy sunt infinite parvae item *secundi* ordinis. Spatioli $dx + \delta x$ (cooperante utraque vi T et N percursi secundum axem x) pars prior dx descripta fuisset solâ *tangentiali* vi operante; et ab *normali* vi accessit spatiolum *alterum* δx. At cum via ds et vis N inter se censendae sint *normales*, ideo se mutuo *non* afficiunt, ideoque elementis dx et δx omnino *nullum* inter se functionale commercium est, et sunt ergo haec elementa prorsus *indepen-*

dentia inter se. Ergo si in istâ (5) pro differentialibus dx' et dy' primi ordinis, reponantur dicti valores (R), ut fiat:

$$6.)\quad \frac{dx d^2x'}{dt^2} + \frac{dy d^2y'}{dt^2} + Xdx + Ydy$$
$$+ \left(\frac{d^2x'}{dt^2} + X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y'}{dt^2} + Y\right)\delta y = 0,$$

et hujus loco scribatur compendii causa:

$$A + B\delta x + C\delta y = 0;$$

tum patet, quod A, B, C, (more independentium coefficientium) per se et *seorsim* sint $= 0$, siquidem nulla ad variationes $\delta x, \delta y$ relatio adest, ut modo dixi. Sic fit:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0.$$

hoc est $d^2x' + Xdt^2 = 0$, et sic deinceps. Cum sit autem $dx' = dx + \delta x$, ideoque

$$d^2x' = d^2x + d\delta x,$$

ergo (cum δx jam sit *secundi* ordinis) terminus $d\delta x$ erit ordinis *tertii*, qui ergo in praecedente $d^2x' + Xdt^2 = 0$ per legem dimensionum ultro evanescit; ut ergo fiat $d^2x + Xdt^2 = 0$. Idem intellige de termino d^2y', et idem (si is terminus adforet,) etiam de d^2z'. Ergo in ista $A + B\delta x + C\delta y = 0$, id est in ista (6) loco d^2x' et d^2y' scribendum est simpliciter d^2x et d^2y. Quo facto formula virtualis *variationum*, (quae nempe effectum a vi *normali* oriundum simul complectitur,) perfecte ante oculos est! Ceterum aequatio $A = 0$ praecise est *ista* ipsissima (4), nempe virtualis aequipollens *tangentiali* vi. Quae (4) igitur si dicto modo in *variationum* formulam $B\delta x + C\delta y = 0$ transformatur, tum effectum *ambarum* virium T et N sola *per se* complectitur, et his ambabus $B = 0$ et $C = 0$ continetur plena problematis *resolutio*. — Atque haec est ergo variationum vera quasi Metaphysica; (quas variationes autem plane *superfluas* esse, infra docebimus per magnam artem *Pythagoricam*.) —

§. 6.

Ex his patet jam, quod variationes nequaquam sint aliquod humanum *figmentum*, seu motus nescio quis *precarius*, quem corpus vel systema induere ponatur, sed esse designant, ut vidimus, praecise motum *curvedinis*, a vi *normali* oriundum. Et sic ergo Mechanica ab omni motu fictitio, (qui nempe in *cerebro* tantum nostro fieri praesumebatur,) *liberata* esse gaudet. — Nam nihil *obscurius* est; et magis praeter veritatem, quam ille conceptus, quem Lagrangius, Carnotus aliique magni viri de variationibus exhibent. Loquuntur enim (prorsus mystice) de tantillo quodam *precario* motu δx, δy, δz secundum axes, (mouvement *fictice*, position *fictice*,) cui tantillo motui autem cum vero motu per dx, dy, dz nihil omnino commercii sit. Et sic ergo, adornatâ variationum formulâ $B\delta x + C\delta y + D\delta z = 0$, nanciscuntur (ob dictam independentiam) privilegium ponendi $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$. At vero hi motus tantilli δx, δy, δz non fiunt per *phantasiam* tantum, sed sunt *reales* prorsus, et sunt nempe ea praecise alteratio, quam vis *normalis* producit secundum axes. —

§. 7.

Sicut (5) aequationem $VdV + Pdp = 0$ ad axes x, y reduximus, ut fieret:

$$1.)\quad \frac{dxd^2x}{dt^2} + \frac{dyd^2y}{dt^2} + Xdx + Ydy = 0,$$

et sicut hanc (1) dein ad *variationes* traduxi:

$$2.)\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right)\delta y = 0, \text{ vel } B\delta x + C\delta y = 0,$$

(ex quo habetur *solutio* problematis, ponendo $B = 0$, $C = 0$,) sic idem pro integro *systemate* aliquo expeditur:

$$M'V'dV' + M''V''dV'' + \ldots + Pdp + Qdq + \ldots = 0;$$

quo casu nempe membrum *singulum* tractandum est, sicut ista $VdV + Pdp = 0$ tractabatur. Sic oritur pro systemate aequatio projecta hujus formae:

$$3.)\quad S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z+P\delta p+Q\delta q\ldots\right)M=0.$$

In quo Gallico scribendi more spectat S ad numerum corporum M systematis. Quod quo sensu intelligendum sit, in gratiam tironum exemplo brevissimo monstrabo. — Pro massis M, m, se mutuo trahentibus quaeratur aequatio variationum, conditiones resolutionis omnes continens. Massae M, m describant curvas S, s respective, ut sit:

$dS = Vdt.\quad ds = vdt.$

Erit virtualis pro Casu hoc formula:

$$4.)\quad MVdV + mvdv + Pdp = 0.$$

In qua nempe P est *motrix*, qua massae in se agunt, (Conf. §. 3. fin); et p est massarum distantia inter se. Ad massam M pertineant jam coordinatae x', y', z', ad massam m autem coordinatae x'', y'', z''. Erit ergo:

$$p = \sqrt{[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2]}.$$

Hanc secundum δ differentiando et per P multiplicando, fit:

$$5.)\quad P\delta p = X(\delta x'-\delta x'') + Y(\delta y'-\delta y'') + Z(\delta z'-\delta z'').$$

in qua nempe $X = P\frac{x'-x''}{p}$, $Y = P\frac{y'-y''}{p}$, $Z = P\frac{z'-z''}{p}$.

Et imaginando facile assequimur, fractiones post P conspicuas designare cosinus eorum angulorum α, β, γ, quos directio p facit cum axibus x, y, z respective. Sic ergo X, Y, Z designant potentiae P projectionem ad istos tres axes x, y, z, ut sit:

$X = P\cos\alpha,\quad Y = P\cos\beta,\quad Z = P\cos\gamma.$ Unde:

$X^2+Y^2+Z^2 = P^2$, id est:

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1.$

(Pro hac ultima interdum utiliter adhibui formam:

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+1 = 0.$

Nam ambas deprehendo synonymas esse.) Jam ex ista (4) expelle velocitates, V et v, ope harum $dS = Vdt$ et $ds = vdt$. Deinde ope harum:

$dS^2 = dx'^2+dy'^2+dz'^2$ et $ds^2 = dx''^2+dy''^2+dz''^2$,

habebis porro dSd^2S et dsd^2s. Denique loco differentialium primi gradus dx', dy', dx''... adhibe variationes $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$,..... et loco Pdp adhibe $P\delta p$ (nro. 5), et sic ante oculos erit quaesita aequatio:

$$6.)\left(\frac{Md^2x'}{dt^2}+X\right)\delta x'+\left(\frac{Md^2y'}{dt^2}+Y\right)\delta y'+\left(\frac{Md^2z'}{dt^2}+Z\right)\delta z'+$$
$$\left(\frac{md^2x''}{dt^2}-X\right)\delta x''+\left(\frac{md^2y''}{dt^2}-Y\right)\delta y''+\left(\frac{nd^2z''}{dt^2}-Z\right)\delta z''=0.$$

Quae est ergo specimen istius (§. 7. nro. 3.). — Et similiter pro pluribus massis. Ceterum haec (nro. 6.) offert sex aequationes; $Md^2x'+Xdt^2=0$, et sic deinceps, quibus totum problema absolvitur. Sed reliqui calculi, utut elegantissimi, locum hic non inveniunt. — Nam ex his mechanicis discedere propero. Ceterum patienter habeant Lectores, nam articulo temporis ad jucundiora transeo.

§. 8.

Monendum adhuc est, quod variationes *alio* etiam sensu quam ob vires normales in calculos hos ingrediantur, nempe si differentialia diversae categoriae *distinguenda* inter se sint. Exemplo sit curva catenaria. Quoniam hic de curva *materiali* sermo est, ergo ejusdem elementum dM in calculum ingreditur. Hoc elementum, si a vi P urgeatur, praesto est vis motrix $=PdM$. Jam cum aequatio pro aequilibrio foret $Pdp+Qdq+...=0$, pro hac jam distinctionis causa scribendum erit:

$$P\delta p+Q\delta q+...=0.$$

siquidem literam d pro *massae* elemento usurpavimus. — Aliâs oriretur *confusio*. — Jam si elementum dM urgeatur a vi P in directione lineae p, ergo (cum hic *motrici* sit opus,) scribendum est non $P\delta p$, sed $PdM.\delta p$. Sed praeter hanc vim P agit in elementum dM porro vis *tensionis* $=T$, quam nempe *contigua* curvae elementa in illud exercent. Ergo si recta u *directionem* hujus tensionis indicat, adest porro momentum $=T\delta u$, ideoque cum aliae vi-

res vel conditiones nullae adsint, erit completa aequatio aequilibrii *haec*:

$$PdM\delta p + T\delta u = 0.$$

At vero directio u est praecise curvae elementum $= ds$, ergo fit:

$$PdM\delta p + T\delta ds = 0.$$

Vel (ad variationes commode reducendas) scribatur:

$$PdM\delta p + Td\delta s = 0.$$

Quae est jam quaesita virtualis aequatio; ex qua deinde aequatio ad catenariam deducitur. At vero ab his principiis jam discedimus; pro scopo enim satis dictum.

§. 9.

Tradam tamen hoc loco ex domesticis meis adhuc exemplum actuale cujusdam curvae sane quam egregiae, in quod ante hos dies incidi. — Est autem curva haec non ex istarum numero, quas pro ingenii lubitu passim rimamur, sed est curva realis et Essentialissima quasi in tota rerum natura. Imo si fractus illabatur orbis, vel si Neutoni legi forsan lex *alia* ad nutum summi Opificis aliquando subrogetur, inter omnes *crises* et catastrophas mundanarum rerum ista curva in *salvo* erit. — Loquor de curva *Censrifuga*. — (Fig. 5.) Radius OO' circa fixum centrum O rotetur, et sit indefinita longitudine ultra circulum protensus. In C sit massa iners, quasi *globus*, quem radius ille *perforat*, ita ut libere in hoc radio mobilis hinc illinc existat. Nanciscatur globus in puncto C velocitatem $= c$, quae secundum tangentem dirigitur. Sic inchoat globus circulum circa O. Sed oboriens vis centrifuga $= N$, globum subinde a centro *fugabit*. — Quaeritur *curva*, quam globus describit. — Sit $OC = a$, $OP = y$, $CP = s$. Formula virtualis ad casum hunc foret $VdV + Ndy = 0$. (§. 2. nro. 3.), ubi nempe V est globi in curva sua *velocitas*. At vero constat, quod loco potentiae alicujus P determinate ponendum sit potius $2gP$, respectu mensurae Galilaeanae, quae *unitatis* instar inservit. Unde pro $dV =$

Pdt

Pdt scribi solet $dV = 2gPdt$. Factorem hunc ergo commode in calculum revoco, ut sit $VdV + 2gNdy = 0$. At vero vis N est *repellens*, non attrahens, ergo habetur justa formula:

$$VdV - 2gNdy = 0.$$

Quia jam vis N agit secundum directionem *radii*, ergo celeritas ea, quâ circulare elementum FP describitur, ab hac vi nullo modo alteratur. Nam haec *vis* et illa *celeritas* inter se *perpendiculares* existunt. Ergo globus circularia haec elementa FP semper eâdem illâ insitâ velocitate $= c$ describit. Positoque $FP = dx$, erit igitur $dx = cdt$. Vis centrifuga N autem, ex centro O secundum radium operans, aestimatur secundum quadratum celeritatis, quâ FP describitur, *directe*, et secundum radium y *inverse*.

Ergo habetur ejus mensura $N = \frac{cc}{2gy}$. Ergo:

1.) $VdV - \frac{ccdy}{y} = 0.$

2.) $V^2 - 2c^2 \log y = \text{const.}$

Determinatur constans ex $y = a$ pro $V = c$. Ergo:

3.) $V = c\sqrt{(1 - 2\log a + 2\log y)}$.

Ergo ob $ds = Vdt$ fit:

4.) $dt = \frac{ds}{c\sqrt{(1 - 2\log a + 2\log y)}}.$

Jam cum sit $ds^2 = dy^2 + dx^2$ vel $ds^2 = dy^2 + c^2dt^2$, ex hac ultimâ pone ds in istam (4), fietque:

5.) $dt = \frac{dy}{c\sqrt{(2\log y - 2\log a)}}.$

Denique cum sit $dx = cdt$, et ex geometricis porro $dx = yd\varphi$, ergo $cdt = yd\varphi$; ex qua imponendo dt in istam (5), obtinetur:

6.) $d\varphi\sqrt{2} = \frac{dy}{y\sqrt{\log\frac{y}{a}}}.$ Et integrando:

$$\varphi\sqrt{2} = \text{const.} + 2\sqrt{\log \frac{y}{a}}$$

Ob $\varphi = 0$ pro $y = a$ fit const. $= 0$. Ergo tandem aequatio ad curvam centrifugam:

7. $yy = aa e^{\varphi\varphi}$,

quae mira symmetria gaudet. Pro $\varphi = \pi$, $\varphi = 2\pi$, ... obtinetur longitudo vectoris post singulam revolutionem. Velocitas *angularis* est $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{y}$, ergo decrescit crescente y. Est autem polaris aequatio (7) curvae hujus *ideo* prorsus mirabilis, quod velocitas initialis c ex calculo *excidit*. Curva haec igitur a magnitudine velocitatis c plane *non* dependet, et *qualiscunque* initialis velocitas c fuerit, curva centrifuga semper *eadem CP* describitur! — Et quivis circulus igitur sicut suam unicam *cycloidem* gignit rotando, sic et unicam possidet curvam *centrifugam* sibi conjugatam; et non plures. Et sicut omnes *cycloides* inter se sunt similes, ita duorum circulorum *centrifugae* curvae inter se similes existunt. Habeat alius circulus radium $= b$, eruntque horum circulorum aequationes centrifugae:

$$yy = aa e^{\varphi\varphi}, \quad uu = bb e^{\psi\psi}.$$

Ergo pro $\varphi = \psi$ fit $u : y = b : a$; unde si pro *unico* aliquo circulo descripta fuerit curva centrifuga illi competens, tum puncta *alterius* cujusvis centrifugae curvae habentur proportione unica. Curva nostra pro patre *circulum*, pro matre vim centrifugam agnoscit; sic ejus Genealogiam habes. Ceterum desiderari potest etiam integrale *temporis* (nro. 5), quod posito $y = au$ fit:

$$ct\sqrt{2} = \int \frac{a\,du}{\sqrt{\log u}}.$$

Sed hoc indeterminate non integratur. Ponendo autem $\log u = -\log \frac{1}{u}$, prodit forma, quam Eulerus (Comm. Petrop. T. XVI. p. 111) determinate exhibet:

$$\int \frac{du}{\sqrt{\log \frac{1}{u}}} = \sqrt{\pi}.$$

Et hoc *idem* integrale, (sub alia tamen forma) exhibuit illustris *Laplace* (Mecan. cel. L. 10, nro. 5.), qui habet nempe:

8.) $\int e^{-xx}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Quod posito $e^{-xx} = u$, praecise ad formam nostram $\frac{du}{\sqrt{\log u}}$ reducitur. Integrale hoc $\sqrt{\pi}$ docet, quam arcte curva centrifuga in circuli naturam, cujus mera proles est, se insinuet. Est ea curva autem inprimis ideo generosissima, quod non ab aliqua *gravitatis* lege pendet, sed a *nullis* omnino viribus mundanis temperatur; nam est ea merum productum motus *angularis*. — Non est *accidentalis* naturae curva haec, sicut ellipses, quae nempe mutatâ gravitationis mundanae lege subinde ex coelo exulabunt; vel sicut cycloïs, quae tavtochronismum et brachystochronismum non diutius conservabit, nisi quamdiu viget *Galilaeana gravitas*.

§. 10.

Quum hoc ipso momento discedere ab his mechanicis vellem, occasione praecedentis problematis veniam Lectores rogo, ut in usum tironum exemplo manifesto demonstrem, quo pacto mundani motus temperentur ab influxu vis istius *centrifugae*. Commodissime huic scopo inservit problema centralium, et utar eâ praecise methodo, quae effectum centrifugarum virium ipsis paene oculis intuendum sistit. Et simul elegantissimae observationi *Cosmologicae* locus erit. — (Fig. 6.). Sit O centrum virium, et $AO = a$. In A projiciatur corpus normaliter ad AO cum initiali velocitate $= c$. Ex O describe circulum AS, et pervenerit corpus in locum M. Esto radius vector $MO = y$. Ibi accelerabitur corpus a vi $= \frac{\Delta\Delta}{yy}$. Dum ergo corpus descripsit angulum $= \varphi$, interim descendit per LM. Ergo tempus;

quo *angulus* ille descriptus est, et tempus descensus per LM erunt *aequalia*. Car jam corpus ab M non descendit sensim ad O seu ad centrum? — Respondeo, quod corpus moveatur simul angulariter sive in *circulum*. Sic enim oritur vis *centrifuga*, quae globum a centro *fugare* studet; ideoque vim centripetam indesinenter plus minus *debilitat*. Haec centrifuga vis esto $= N$. Sic ergo corpus in M locatum urgebitur non a tota vi $f = \frac{\Delta\Delta}{yy}$, sed ob contraniteniem centrifugam, urgebitur a residuâ tantum vi:

1.) $F = f - N$.

Quodsi ergo loco totalis centripetae f introducamus vim diminutam $F = f - N$, tum descensus per LM factus *independenter* ab angulari motu considerari potest. Nam perturbatio, quam vis f ab centrifuga patitur, eo ipso jam in calculum introducta est, quod loco totalis vis f diminutam vim $f - N$ adhibeamus. Sit $LM = u$, ergo $u = a - y$, $du = - dy$. Porro sit vera corporis velocitas $= V$, ergo si $AM = s$, erit $ds = Vdt$. Sed inest corpori *descensiva* velocitas $= v$ in directione *vectoris*, et in hac vectoris directione urgetur ergo corpus ab residua illa vi $= F$, ergo pro hoc motu versus centrum directo habetur:

2.) $dv = 2gFdt$ et $du = vdt$.

Unde sequitur $vdv = 2gFdu$, vel (ob $du = - dy$) fit:

3.) $vdv + 2gFdy = 0$.

In hac virtuali jam valor $F = f - N$ debite exprimendus est. Primo est $f = \frac{\Delta\Delta}{yy}$, ergo quaerendus restat valor N. Ponatur $mR = dx$, unde $dx = yd\varphi$. Velocitas, qua dx percurritur, dicatur $= w$, ergo vis centrifugae mensura est $N = \frac{ww}{2gy}$.

Sed est $dx = wdt$ et $dx = yd\varphi$, ergo $w = \frac{yd\varphi}{dt}$, ergo:

4.) $N = \frac{yd\varphi^2}{2gdt^2}$.

Utar nunc ad ambages vitandas, lege Keppleri; nempe sector OMm vel $yyd\varphi = Adt$, vel (si constans A rite determinetur $A = ac$) fit:

5) $yyd\varphi = acdt$.

Ex qua subrogando dt in istam (4) fit:

6.) $N = \frac{a^2c^2}{2gy^3}$.

Ergo vis centrifuga nitens contra centripetam est inverse ut cubus vectoris. Et sic ergo (nro. 3.) fit:

7.) $vdv + 2g(f - N)dy = 0$ id est:

8.) $vdv + 2g\left(\frac{\Delta\Delta}{yy} - \frac{a^2c^2}{2gy^3}\right)dy = 0$.

Hanc integrando et determinando constantem ex casu $v = 0$ pro $y = a$, deinde ponendo velocitatem projectilem $c = 2\sqrt{gh}$, reponendoque tandem $-\frac{dy}{dt}$ pro v, habetur *tempus*:

9.) $dt = \frac{ydy}{\sqrt{\left[\left(h - \frac{\Delta\Delta}{a}\right)yy + \Delta\Delta y - a^2h\right]} \cdot 2\sqrt{g}}$

At ejecto dt ex hac et (5) habetur aequatio angularis ad *curvam*:

10.) $d\varphi = \frac{ady\sqrt{h}}{y\sqrt{\left[\left(h - \frac{\Delta\Delta}{a}\right)yy + \Delta\Delta y - a^2h\right]}}$

quam reperio per substitutionem $y = \frac{2a^2h}{\Delta\Delta - hx}$ ad formam debitam angularem reduci:

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{(\Delta\Delta - 2ah)^2}{hh} - xx\right)}} \text{ vel } d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}.$$

Quae si integretur, et jam introducantur coordinatae $PM = z$, $OP = u$, prodit aequatio ad conicas:

11.) $\Delta^4z^2 = 4a^4h^2 + 4a^2h(\Delta^2 - 2ah)u - 4ah(\Delta^2 - ah)u^2$.

Ex nostra resolvendi methodo patet, motus coelestes aliter non succedere, nisi aeterno *bello*, quod vi centripetae ge-

rendum est cum vi centrifuga, terribili antagonista et *hoste*. Et mirum sane inter has ambas potentias divortium est, cui neque pax et concordia, sed ne treuga quidem ulla datur. Adeo hi generosi athletae indefesse inter sese depugnant. Illustris Laplacius recte in libro quodam observat, „si siderum diurnus motus *actualis* esset, (sicut supponebant veteres,) tum oriturum esse horrendum sane virium centrifugarum dispendium.“ Imo hae vires tam enormes fierent, ut nullâ satis magnâ vi centripetâ compesci possent.

Occurrit autem hic memorabile quid. Intuere istam (7) vel (8), et in oculos cadet, existere curvae quoddam punctum, ubi evadit $f - N = o$, id est:

$$12.)\ \frac{\Delta\Delta}{yy} - \frac{a^2c^2}{2gy^3} = o \text{ vel } y = \frac{2a^2h}{\Delta\Delta}.$$

Quaeritur ergo, quodnam *sit* illud curvae punctum. Ex figurâ est $u^2 + z^2 = y^2$ ergo $u^2 + z^2 = \frac{4a^4h^2}{\Delta^4}$. Ex hac pone valorem z in istam (11), et fiet $u = o$, id est $OP = o$. Sed est ibi ordinata $= OQ$, ergo si $f - N = o$, tum corpus est in puncto Q, et nempe foco O directe imminet. Quoties ergo corpus transit per Q sive per ordinatam foci, tum vis centrifuga atque centripeta praecise se *destruunt*. — In isto Q puncto igitur, corpus â *nullâ* vi urgetur, et unice suâ *propria* ac *domestica* velocitate, (quae aequabilis est,) per illud punctum transfertur. — O! beata sidera, quae ergo saltim *bis* in desursu suo evadunt *libera* ab isto duplici tum attractionis tum centrifugae saevo et inextricabili jugo, et existit Q locus, ubi planetae tandem *suae* jurisdictionis fiunt, et ab omni externa vi tandem aliquando *respirant*, et breves quasi *Ferias* celebrant! — *Eousque* verum est, Libertatem, gratissimum mortalibus donum, beneficio summi Opificis quodammodo per omnes *coelos* vigere et in salvo esse. Est mihi autem circa mundanos motus inauditum theorema quoddam, de quo vero pro tempore agendum est al-

tum et pythagoraeum silentium. — Immo vero si magnus Pythagoras, (quem propter Virtutem et Sapientiam et omne genus meriti sancte inter primores humani generis colo, et cum quo et Neutono aliisque ejusdem farinae viris coelestilare conversari praeoptem,) corporibus mundanis olim crystallinaeque compagi tribuisse perhibetur sphaerarum concentus *musicos*, credibile est, illa cymbala inprimis in regione ♀ et vicinia *foci* resonatura, quasi in triumphum recuperatae Libertatis. — At vero Pythagoras, (judice me non sordidus auctor naturae verique), per istas harmoniae musicae numerorumque coelestium hieroglyphas absque dubio *profundiorem* sensum propinare mortalibus voluit, pungendo nempe praematuros *Joniae* philosophos, qui sine matheseos cognitione ad cosmophysicam per vanas hypotheses adscenderent. — Indigitare certe voluit, haec mysteria *maturiori* aevo per geometriam *numerosque* revelata fore, et sic ergo Copernici, Galilaei, Keppleri aureum seculum divinâ mente auspicatus est. Quod Jonica schola per *aquam*, per *aerem*, quod posthac alii per *atomos* vel occulta quaedam semina qualitatesque explicabant, id Pythagoras teleologice ad mensuras et numeros revocavit. — Immo si suspicatus esset, famosum theorema suum ad explicandam *universi* structuram pro vero hypomochlio esse, sane de hecatombe plus quam unâ honesto triumpho cogitasset. — Quippe mente sedebat huic viro, vitam impendere *vero*, et praesensisse videtur verba plane divina poetae:

Felix qui potuit rerum cognoscere causas;
Ille metus omnes et inexorabile fatum
Subjecit pedibus, strepitumque Acherontis avari.

§. 11.

Circa variationum formulam, supra oblitus fui, *observationem* quandam addere. Ea formula nempe uniformi processu ad omne cogitabile problema adhiberi potest. Quod

cum reputaret Lagrangius, Mechanicam asserit reductam jam esse ad unicam formulam *cardinalem*, eo fere sensu, quo *subtangentes* vel radios *osculi* et similia determinemus mediante quadam formula *catholicâ*. — At vero hoc assertum non adeo stricte interpretandum est. Nam *conditionum* problematis introductio in calculum, et requisitae pro singulo casu operationes *analyticae* saepe poscunt non tam *formulam* quam *ingenium*; nec ergo satis est, catholicam formulam in possesso et quasi in scriniis habere. Illustris *Lagrangius* quidem illius ope casus omnes expedivit. At vero quaeso te, si catholicae formulae supellex in promtu tibi sit, an ideo totum illum Lagrangii librum *ipse* quoque conscripturus eras? — Forsan dubitare fas est. — Imo vero cum operationes quasdam Lagrangianas (easque in ipsâ jam Staticâ) perlustrarem, successus ille mirabilis proficisci mihi saepe videbatur non tam a solerti *formula*, quam a solerti *Viro*. Nimirum si formulam suam tanquam panaceam commendat, reputandum est, quod sapiens ille Galliae Trismegistus mortalibus offerat Scanderbegii quidem *gladium*, sed nec ejusdem *brachium*. Id quod in gravissimo quodam casu non sine dolore ipse quoque expertus fui; nempe conditiones problematis mihi analyseos genus imponebant, cui expediendo me imparem sensi. — Hoc ipso momento, dum haec scripsi, Magdeburgo nunciantur fata ultima illustris *Carnoti*; cujus famosi exulis, et viri inter magnos magni exuvias in solo Germano positas, humanâ deflevi lacrimâ. Erat sublimi sane ingenio, quale paucis mortalibus obtigit, modeste de se (quum tantus vir esset,) sentiens, et aequus in *alios*. Erat miro candore animi, et invictâ ad utramque fortunam Constantiâ.

Quum jam ad Geometrica transeam, in commodum eorum, qui Lagrangii Mechanicam possident, essentialem observationem addam. (Qui librum illum non habent, ii innoxie ad §phum sequentem transeant.) — Habet nempe La-

grangius in Statica sua generosissimum problema, de aequilibrio corporis datae cujusvis formae; et jam demonstrat, ad hunc finem requiri ut hujus formulae

$$d^n x^2 + d^n y^2 + d^n z^2$$

variationes existant $= 0$, ita ut sit;

$$1.)\ d^n x d^n \delta x + d^n y d^n \delta y + d^n z d^n \delta z = 0.$$

Demonstrat autem, opus esse talibus aequationibus praecise *tribus*, nempe pro $n = 1$ et $n = 2$ et $n = 3$. — Harum trium aequationum singulam jam per coefficientem indeterminatum Lagrangius multiplicat; quos coefficientes respective per T', T'', T''' exprimam. Qui enim ad res ibi gestas attendit, is intelliget, per hos tres coefficientes designari praecise *tensiones*, quas elementum aliquod corporis, in statu aequilibrii exercet vel patitur a tribus quibuscunque *aliis* corporis elementis. Jam breviter Lectores moneo, quod Lagrangii in hoc negotio operationes *errorem* habeant. Ad istas (1) tres variationum aequationes pro $n = 1$ et $n = 2$ et $n = 3$, pertinent nempe *denominatores* competentes, quos cum Lagrangius praetervideat et *omittat*, ideo fit, ut istae tres tensionum vires prodeant infinite *magnae*. Ego illas vires data opera *quaesivi*, et saltim *unam* earum intuendam sisto. Est nempe vis $T''' =$

$$\frac{\begin{array}{l} dx(\int dy \int Z dM - \int dz \int Y dM + Bz - Cy + H) + \\ dy(\int dz \int X dM - \int dx \int Z dM - Az + Cx - G) + \\ dz(\int dx \int Y dM - \int dy \int X dM + Ay - Bx + F) \end{array}}{d^3x(dzd^2y - dyd^2z) + d^3y(dxd^2z - dzd^2x) + d^3z(dyd^2x - dxd^2y)}.$$

Habes hic ante *oculos* valorem tensionis T''' infinite *magnum*. Et quidem prodit praecise T' ordinis *primi*, T'' *tertii*, T''' *quinti* ordinis infinite magni. Nempe isti, quos dixi, *denominatores* omissi, consistunt ex differentialibus unius, trium et quinque dimensionum respective, ergo jam istae vires T', T'', T''' eodem ordine infinite *magnae* prodeunt. — At haec res ex abrupto nequit explanari, nec

foret hujus loci. Ergo satis est indicasse tum *lapsum* incomparabilis viri, tum etiam indigitasse *fontem* erroris. — Ceterum res omnino *majoris* momenti est; nam ista competentium denominatorum neglectio, (quos restituere interdum ne *potis* quidem sumus,) Lagrangianas operationes in *aliis* etiam casibus periculo reddit obnoxias. Cui rei inhaerere hic nequeo. — Notandum est autem, Lagrangio tensiones istas $= \lambda$, μ, ν dici, quas ego $= T'$, T'', T''' nuncupavi. In actuali tensionis T''' valore exhibendo autem denominationes Lagrangii omnes, ut par erat, *retinui*. — Et jam tandem satis de his.

§. 12.

Agendum est mihi nunc de *angulo curvedinis*. (Fig. 7.) Si A sit *initium* curvae, et ad A et B agantur *normales* ad curvam, oritur angulus φ, quem Joh. Bernoullius dixit *amplitudinem* curvae. Hujus anguli differentiale $d\varphi$ est manifesto angulus *curvedinis*. — Ceterum loco *circuli* osculantis interdum loquuntur etiam de osculante *parabola*. Nempe si $BF = 2r =$ diameter circuli osculantis, et si sit $BD = u$, $CD = z$, erit:

$$z^2 = 2ru - u^2, \text{ seu } z^2 = (2r - u)\, u.$$

Sed $BD = u$ est infinite *parvum* respectu $2r$, ergo $zz = 2ru$; id est curva AB ejusque circulus osculans habet in B puncto curvedinem *parabolae*, cujus vertex est in B, et quae parametrum habet $= 2r$. Sed haec in transitu. —

Ut ergo jam curvedinis angulum universalissime determinemus, utamur usitata illa et perfectissima methodo, quae a *finitis* ad infinite parva transit. — Sit (Fig. 8.)

$$OP = x, \quad PA = y; \text{ et erit:}$$

$$1.)\quad OQ = x + dx,$$
$$OR = x + 2dx + d^2x.$$
$$OS = x + 3dx + 3d^2x + d^3x.$$

Porro $QB = y + dy$

$RC = y + 2dy + d^2y.$

$SD = y + 3dy + 3d^2y + d^3y.$ Et cetera.

(Si curva foret curvaturae *duplicis*, tum pro *tertia* coordinata accederent termini $z + dz$, et $z + 2dz + d^2z$, et porro. Acciderent nempe istis z praecise eadem, quae istis x et y accidunt. Unde a duabus coordinatis x, y inchoando, res sponte ad *tres* x, y, z seu ad curvedinem duplicem extenditur, nec novo opus est calculo.) — Intuere nunc polygonum $ABCD\ldots$, (quod posthac in *curvam* abiturum est,) et fiat $AB = p$, $BC = q$, et recta AC, (quam ductam suppone) $= n$. Angulus ABC, manifesto est complementum anguli *curvedinis*. Nam acutus angulus, quem AB et BC formant, angulus *curvedinis* est. Qui ponatur $= \theta$. Sic in $\triangle ABC$ fit $pp - 2pq \cos\theta + qq = nn$. Ergo:

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{pp + qq - nn}{2pq}, \text{ ergo habetur:}$$

$$2.)\ \sin^2\theta = \frac{4p^2q^2 - (p^2 + q^2 - n^2)^2}{4p^2q^2}.$$

In hac jam literae p, q, n per istas (1) exprimendae sunt; Est:

$BM = OR - OQ = dx + d^2x.$

$MC = RC - QB = dy + d^2y.$ Similiter:

$AK = OR - OP$ et $KC = RC - AP.$

Ergo si $AB = ds$, tum ad oculos erit:

$$pp = dx^2 + dy^2 = ds^2 \qquad \text{A.)}$$

$$qq = BM^2 + MC^2 = ds^2 + 2ds d^2s + d^2x^2 + d^2y^2.$$

$$nn = AK^2 + KC^2 = 4ds^2 + 4ds d^2s + d^2x^2 + d^2y^2.$$

Quibus in istam (2) subrogatis et exstinguendo deinde superiores ordines, erit ante oculos *haec:*

$$3.)\ ds^2 \sin^2\theta = d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2.$$

In hac dimensiones indicant, esse θ infinite *parvum* angulum, ergo $\sin\theta = \theta$, et pro θ seu angulo curvedinis scribemus in posterum $d\varphi$. Sic loco (3) habetur:

$$4.)\ ds^2 d\varphi^2 = d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2$$

vel pro *duplici* curvedine, (id est, si coordinatam *tertiam*

dz retinuissimus, unde foret $pp = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, et sic deinceps,) prodibit:

5.) $ds^2 d\varphi^2 = d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2$.

Ergo si r sit radius osculi, ob $d\varphi = \frac{ds}{r}$ fiet:

6.) $r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2)}}$.

7.) $r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}$.

Nempe (6) pro *simplici*, et (7) pro *duplici* curvedine. Et hi ambo sunt jam pervulgati et universales termini pro radio *osculi*. —. Ut radii hujus actualis valor obtineatur, sumamus *ds* pro constanti, et fiet respective:

8.) $r = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}}$. 9.) $r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)}}$.

Ubi in denominatoribus manifesto pythagoricus ordo *secundus* ante oculos est. — Jam vero Geometris rem elegantissimam ante oculos ponam. Continuetur (Fig. 8.) elementum *AB* versus *V*, deinde super *BC* erigatur perpendicularis *CV*. Hoc ad *actualem* aliquam curvam applicando (Fig. 9), manifestum est, elementum hoc *CV* esse prolongationem radii *osculi* ad *tangentem* usque. Sit *S* = centrum osculi, ergo *SC* = radius osculi *r*. Valebit ergo nota proportio illa jam supra (§. 5.) commemorata:

10.) $VC : CB = CB : r$

id est $VC = \frac{ds^2}{r}$. Cum ergo *VC* sit infinite parvum *secundi* ordinis, ideo scribendum est $VC = d^2u$. Ergo $d^2u = \frac{ds^2}{r}$. Jam vero ipsissima theorematis pythagorici continuatio tanquam fulminis instar in oculos incurrit; res enim inexspectata mihi ipsi, et quasi pro pago Bohemico fuit. Quum nempe istam (8) forte fortuna intuerer, et quidem sub hac praecise forma:

$$\frac{ds^2}{r} = \sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2)},$$

et quum simul ad manus esset praecedens $\frac{ds^2}{r} = d^2u$, subinde secundi ordinis pythagorici *compos* fui:

11.) $d^2u^2 = d^2x^2 + d^2y^2$.

Qua esoterica Geometriae relatione pythagorica non parum laetatus fui. (Lectores autem teneant in futurum, per elementum d^2u designari, ut subinde dixi, sagittam illam CV ab radio *osculi* ad *tangentem* usque.) Et sic patet ergo, dari per elementa ad curvam existentia pythagoricum *duplex* et quasi *conjugatum* systema:

BC^2 vel $ds^2 = dx^2 + dy^2$

VC^2 vel $d^2u^2 = d^2x^2 + d^2y^2$. (Fig. 8. et 9.)

Hanc ordinis pythagorici continuationem, subinde pro penitus novâ agnovi, (donec mihi demonstretur contrarium.) Quamvis enim praedicta *proportio* (nro. 10.) dudum innotuit, itemque ille valor pro radio *osculi*, (nro. 8.) dudum in scientia viguit, manifestus *casus* tamen requirebatur, ut quis istam *proportionem* et illum *osculi* terminum uno eodemque tempore praecise, ante oculos haberet et pythagorice inter sese combinaret. — Id quod ego forte fortuna *feci*. — Ceterum aequationem $d^2u = \frac{ds^2}{r}$ substitui, ut viderunt lectores, in expressiones (8) et (9), quae supponunt ds = const. — At vero maximi momenti est, valorem praedictum $r = \frac{ds^2}{d^2u}$ substituere potius in *completas* pro radio osculi expressiones (6) et (7), quae nempe *nullum* differentiale constans supponunt. Quo facto ante oculos est incomparabili successu ordo *utrinque* pythagoricus:

12.) $d^2s^2 + d^2u^2 = d^2x^2 + d^2y^2$:

qui exhibetur ergo per *quatuor* elementa juxta curvam occurrentia. (Et pro *duplici* (nro. 7.) curvedine fit $d^2s^2 +$

$d^2u^2 = d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$; quam duplicem autem brevitatis causa non porro respiciam.) — Haec (12) jam *praeclarae* indolis est, ut mox patebit.

§. 13.

Jam in eo sum, ut functionem $F\varphi = d^n x^2 + d^n y^2$ actualiter in medio sistam. Intuere (Fig. 8.), quae habet angulos $B, C, D \ldots$ in infinitum. (Nimirum *acutos* angulos intelligo, quos verbi causa binae AB, BC inter se formant; nam hi *acuti*, sunt praecise anguli *curvedinis*.) Hunc angulum $d\varphi$, quem nempe lineae AB, BC acutum formant, supra derivavi ex contemplatione trianguli ABC. Unde (§. 12. nro. 4.) elicuimus pro $d\varphi$ aequationem:

1.) $d^2s^2 + ds^2 d\varphi^2 = d^2x^2 + d^2y^2$

(Ex qua ob $d\varphi = \frac{ds}{r}$ et $r = \frac{ds^2}{d^2u}$ obtinuimus divinam istam nro. 12.). — Jam reputabam, quod similiter progredi liceat ad triangulum subsequens BCD, (ducendâ chordâ BD,) et quod hoc novum triangulum tractari possit, ut $\triangle ABC$ tractavimus. Deinde subsequi porro triangulum tertium CDE, (ducendâ chordâ CE), et sic in infinitum. Verbi causa si fiat jam $BC = p$, $CD = q$, $BD = n$, angulus rectarum BC, CD acutus id est curvedinis $= \psi$, tum pro secundo hoc triangulo erit ut supra:

$$\sin^2\psi = \frac{4p^2q^2 - (p^2 + q^2 - n^2)^2}{4p^2q^2}.$$

Et fient in hac jam substitutiones, ut supra docui:

$$pp = BM^2 + MC^2,\ qq = CN^2 + ND^2,\ nn = BT^2 + TD^2.$$

Adhibendo jam pro rectis $BM \ldots\ldots$ valores suos ex figura (8), vidi in calculum intrare elementa d^3x et d^3y. Porro pro triangulo tertio CDE intrare videbam d^4x et d^4y. Et sic deinceps. Denique videbam angulos curvedinis (*acutos* nempe intelligo) $B, C, D, E \ldots$ esse respective *hos*:

$d\varphi$

$d\varphi + d^2\varphi$

$d\varphi + 2d^2\varphi + d^3\varphi$

$d\varphi + 3d^2\varphi + 3d\varphi + d^4\varphi$. Et sic deinceps.

Videbam ergo, contemplationem altiorum *triangulorum*; perducturam esse ad altiores relationes inter $d^n x^2$, $d^n y^2$ $d\varphi$, $d^2\varphi$ . . . et porro. Quoniam autem triangula haec altiora mox ad molestiores calculos ducunt, ergo decrevi operationem *invertere*, et nempe vice versa pro assumtis categoriis pythagoricis $d^n x^2 + d^n y^2$ investigare competentes functiones *curvedinis* $F\varphi$ Quae operatio est inter pulcherrimas, quas unquam novi, et jam tradetur. Adhibebo autem interim ds = const., ut supra. Et patebit jam, quotientem pythagoricum:

2.) $F\varphi = \frac{d^n x^2 + d^n y^2}{dx^2 + dy^2}$

omnino semper exhiberi per angulum *curvedinis*. — Quum autem categoria prima:

3.) $\varphi = \frac{d^2x^2 + d^2y^2}{dx^2 + dy^2}$

jam *exhibita* sit (§. 13. nro. 1.), ergo ad d^3x^2 progredior, et quaero nempe $F\varphi = d^3x^2 + d^3y^2$.

Ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$ = const. habetur:

4.) $d^2x = -\frac{dyd^2y}{dx}$.

Quo in istam (3) nempe in $d\varphi^2 ds^2 = d^2x^2 + d^2y^2$ subrogato fit:

5.) $d^2y = dxd\varphi$ Ex hac et (4) fit:

6.) $d^2x = -dyd\varphi$.

Hae ambo jam in infinitum differentiari possunt, et ad *d'extram*, loco d^2x et d^2y indesinenter valores ipsi hi (5) et (6) *substitui*. Sic temporis ictu ante oculos erunt differentialia:

7.) $d^3x = -dyd^2\varphi - dxd\varphi^2$

$d^3y = dxd^2\varphi - dyd\varphi^2$

8.) $d^4x = - dyd^3\varphi - 3\,dxd\varphi d^2\varphi + dyd\varphi^3$

$d^4y = dxd^3\varphi - 3\,dyd\varphi d^2\varphi - dxd\varphi^3.$

Unde porro habetur d^5x, d^5y, et sic deinceps. — Et jam ergo ad finem sumus. Habetur nempe ex (7):

$$d^3x^2 + d^3y^2 = dy^2d^2\varphi^2 + 2\,dydxd\varphi^2d^2\varphi + dx^2d\varphi^4$$
$$dx^2d^2\varphi^2 - 2\,dydxd\varphi^2d^2\varphi + dy^2d\varphi^4$$

hoc est actualiter $d^3x^2 + d^3y^2 = ds^2\,(d^2\varphi^2 + d\varphi^4)$. Vel:

$$9.)\quad d^2\varphi^2 + d\varphi^4 = \frac{d^3x^2 + d^3y^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Et sic ergo ad sinistram conspicua est quaesita functio $F\varphi$. *Eādem* jam elegantia addes porro (8) ambo quadrata $d^4x^2 + d^4y^2$ et erit ante oculos functio:

$$10.)\quad (d^3\varphi - d\varphi^3)^2 + 9\,d\varphi^2d^2\varphi^2 = \frac{d^4x^2 + d^4y^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Jam ergo (nro. 3. et 9. et 10.) ordines *tres* pythagorici ad oculos coram sunt! Et patet ergo, omnino in infinitum existere pro categoriis his pythagoricis functionem:

$$F\varphi = \frac{d^nx^2 + d^ny^2}{dx^2 + dy^2},$$

nempe ita ut $F\varphi$ sit functio anguli *curvedinis*. Et sic ergo monstravimus *artem*, inveniendi ordines pythagoricos omnes per angulum curvedinis $d\varphi$. — Posito autem radio osculi $= r$, constat esse $rd\varphi = ds$. Ergo in his functionibus $F\varphi$ omnes $d\varphi$ et superiores possunt per radium *osculi* exhiberi. Sic loco ordinum (3) et (9); qui sunt nempe:

$ds^2d\varphi^2 = d^2x^2 + d^2y^2$ et

$(d^2\varphi^2 + d\varphi^4)\,ds^2 = d^3x^2 + d^3y^2$, habebitur:

11.) $ds^4 = r^2\,(d^2x^2 + d^2y^2)$ et

12.) $ds^4\,(dr^2 + ds^2) = r^4\,(d^3x^2 + d^3y^2)$:

Et jam dividendo (12) per (11) prodit:

$$dr^2 + ds^2 = r^2\,\frac{d^3x^2 + d^3y^2}{d^2x^2 + d^2y^2}$$

ubi ad *sinistram* quoque, mirum genus pythagoricum ad oculos est! — Sed hoc parum est.

§. 14.

§. 14.

Jam ad *nova* Pythagoraeismi miracula transeo; ex quibus patebit, Pythagorae theorema per *omnes* omnino sublimioris Geometriae ordines quasi *Dictaturam* gerere. — Deinde docebimus, quod hoc *idem* theorema *cosmologico* sensu omnia suo nutui subjiciat et ad forum suum trahat. — Ergo jam totam rem accipe. „In functione nempe:

$$F\phi = \frac{d^n x^2 + d^n y^2}{dx^2 + dy^2}$$

ipsa quoque *curvedinis* functio $F\phi$ ad formam *pythagoricam* se accommodat.“ — Pulchriorem autem, quam quae nunc sequitur, operationem forsan in analysi frustra quaeras. — Respice superiores aequationes (§. 13. nro. 7.), quas brevitatis causa scribamus:

1.) $d^3x = -Pdy - Qdx$
2.) $d^3y = \quad Pdx - Qdy.$

Horum quadrata si addantur, ut loco citato fecimus, tum ante oculos est $d^3x^2 + d^3y^2 = (PP + QQ)\,dt^2$, vel:

$$\frac{d^3x^2 + d^3y^2}{dx^2 + dy^2} = PP + QQ.$$

Et sic ergo ad oculos patet, casu hoc pythagorico functionem $F\phi$ in duo *quadrata* $PP + QQ$ dispesci. Intuere nunc sequentem casum (§. 13. nro. 8.). Posito $d^3\phi - d\phi^3 = M$, et $3\,d\phi d^2\phi = N$, videbis eas formulas abire in formam:

3.) $d^4x = -Mdy - Ndx$
4.) $d^4y = \quad Mdx - Ndy.$

Harum quadrata addendo fit $d^4x^2 + d^4y^2 = (MM + NN)\,dt^2$ vel:

$$\frac{d^4x^2 + d^4y^2}{dx^2 + dy^2} = MM + NN.$$

Et sic patet, *hoc* etiam casu functionem $F\phi$ in duo *quadrata* $MM + NN$ dispesci. — Intuendo jam praecedentes (1) (2) (3) (4), in oculos cadit, quod primae ambae posterioribus ambabus existant omnimode *similes*. Hinc etiam *effectus*

utroque casu idem fuit. Quare si pro *generali* casu exstiterint istae formae:

5.) $d^n x = - A dy - B dx$

6.) $d^n y = A dx - B dy$;

levissimâ operâ tentanti patebit, fieri et prodire formam $d^n x^2 + d^n y^2 = (AA + BB) ds^2$. Et jam facile demonstrabo, „si formae (5) (6) verae sunt pro n, verae sunt etiam pro $n+1$." Sume earundem differentialia, et in his differentialibus loco $d^2 x$ et $d^2 y$ pone suos valores (§. 13. nro. 5. et 6.); et jam ante oculos erit:

$$d^{n+1} x = - (dA - B d\varphi) dy - (dB + A d\varphi) dx$$

$$d^{n+1} y = + (dA - B d\varphi) dx - (dB + A d\varphi) dy.$$

Pro qua breviter scribi potest:

$$d^{n+1} x = - \mathfrak{A} dy - \mathfrak{B} dx$$

$$d^{n+1} y = + \mathfrak{A} dx - \mathfrak{B} dy.$$

Ergo ecce ipsissima redit forma *superior* (5) et (6)! — Hoc est, si

$$d^n x^2 + d^n y^2 = (AA + BB) ds^2, \text{ erit et:}$$

$$d^{n+1} x^2 + d^{n+1} y^2 = (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}) ds^2.$$

Jam vero vidimus, formam (5) (6) valere pro $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, ergo constat propositum. Et agnosce ergo vim et majestatem Pythagorae! Quodsi nunc (nro. 1. et 2.) pro P et Q suum valorem reponas, itemque pro M et N, et sic deinceps pro altiori casu, (quae omnia temporis articulo fiunt,) ante oculos erit jucundum spectaculum, quasi per phantasmagoriam pythagoricam:

$$\frac{d^2 x^2 + d^2 y^2}{dx^2 + dy^2} = d\varphi^2 \qquad \text{K.)}$$

$$\frac{d^3 x^2 + d^3 y^2}{dx^2 + dy^2} = d\varphi^4 + d^2\varphi^2$$

$$\frac{d^4 x^2 + d^4 y^2}{dx^2 + dy^2} = (d\varphi^3 - d^3\varphi)^2 + (3\, d\varphi\, d^2\varphi)^2$$

$$\frac{d^5 x^2 + d^5 y^2}{dx^2 + dy^2} = (d\varphi^4 - 4\, d\varphi\, d^3\varphi - 3\, d^2\varphi^2)^2 + (d^4\varphi - 6\, d\varphi^2 d^2\varphi)^2.$$

Et sic deinceps. — Quomodo *inveniantur* haec functiones $F\varphi$, id clare docui supra (§. 13.); sed in *praesentibus* demonstravi, hanc functionem $F\varphi$ dispesci et *ipsam* quoque in duo *quadrata pythagorica* $AA + BB$. — Nempe patet jam, istam functionem $F\varphi$ ita conflatam esse, ut sit:

$$\frac{d^n x^2 + d^n y^2}{dx^2 + dy^2} = (F'\varphi)^2 + (F''\varphi)^2.$$

Vel si magis arridet ita scribere:

7.) $d^n x^2 + d^n y^2 = [(F'\varphi)^2 + (F''\varphi)^2]\, ds^2.$

Exinde patet, quam praeclara interioris Geometriae principia, eaque expresse pythagorica, ab Euclidis inde ipsiusque Pythagorae temporibus quasi Isidis velamine obducta fuerint. — Videri posset autem, in praecedente scala (H) saltim formulam *primam* ab lege $AA + BB$ exceptam esse; siquidem ea formula solum et *unicum* quadratum $d\varphi^2$ spectandum sistit. At vero id a sola *simplicitate* istius primae categoriae oritur. Demonstratio enim nostra, quod sit semper $F\varphi = AA + BB$, casum illum nequaquam excipi sinit. Immo vero si praecedentes calculi, qui ad $ds =$ const. accommodati sunt, jam pro *nullo* differentiali constanti tractentur, tum isti categoriae primae (K) suum *secundum* deficiens quadratum sponte in *obtutum* revocatur. — Ut nempe calculus accommodetur ad casum, quo *nullum* constans differentiale supponitur, redeundum est ad istam (§. 12. nro. 4.) *completam*, quae nempe terminum d^2s *continet* adhuc. Ut ergo pateat, Pythagoram nostrum dominari imo in *eum* etiam casum, ubi elementum *nullum* constans est, operationem eam clare indicamus. — Primo ante oculos est ista (§. 12. nro. 4.) completa:

8.) $d^2s^2 + ds^2 d\varphi^2 = d^2x^2 + d^2y^2.$

Jam est $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ergo:

9.) $dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y,$

Ex (8) et (9) ejecto d^2y fiet:

10.) $dsd^2x = - dsd\varphi dy + d^2sdx.$

Porro ex (8) et (9) ejecto d^2x fiet:

11.) $dsd^2y = dsd\varphi dx + d^2sdy$.

Pro his (10) et (11) scribe breviter:

12.) $dsd^2x = - Pdy + Qdx$

$dsd^2y = + Pdx + Qdy$.

Harum quadrata addendo habetur:

13.) $d^2x^2 + d^2y^2 = PP + QQ$.

Ecce ergo in dextrâ denuo istam formam *pythagoricam!* Nempe si vel imò *nullum* elementum constans est. Similiter progredieris ad $n = 3$, ad $n = 4$ et porro. Et concludes deinde a casu n ad casum $n + 1$, prorsus ut supra feci. Atque sic ergo loco superioris (K) scalae potest etiam construi scala pro *nullo* elemento constanti, et quae legem pythagoraeum aeque conservat:

14.) $d^2x^2 + d^2y^2 = d^2s^2 + d\varphi^2 ds^2$,

15.) $d^3x^2 + d^3y^2 = (d^3s - dsd\varphi^2)^2 + (dsd^2\varphi - 2\,d^2sd\varphi)^2$.

Et sic deinceps. In hoc systemate completo autem ille divisor $dx^2 + dy^2$ (qui in systemate *K* occurrebat,) non amplius locum habet, id est, functiones ad dextram non amplius per ds^2 sunt multiplices. — Loquentes ergo de hoc *universali* systemate, scribimus hunc in modum:

16.) $d^nx^2 + d^ny^2 = (F'\varphi)^2 + (F''\varphi)^2$. Vel etiam:

17.) $d^nx^2 + d^ny^2 = PP + QQ$.

Jam vero si ad infiniti dimensiones reflectas, manifestum est, esse P et Q necessario infinite parva ordinis n, ergo ponendum est:

$P = d^np \quad Q = d^nq$ unde fit:

18.) $d^nx^2 + d^ny^2 = d^np^2 + d^nq^2$.

Quae formula scientiae hujus pythagoricae quasi culmen est. — Ad *sinistram* occurrunt merae x et y, ad *dextram* vero merae s et φ. Et quidem sola *differentialia*; nam finita ex his formulis *exulant*. Intuere nunc praecedentem:

$d^nx^2 + d^ny^2 = d^np^2 + d^nq^2$.

Quum dx et dy designent *lineas*, ergo d^nx et d^ny desig-

nant pariter *lineolas*, altiorum nempe ordinum. Ergo etiam $d^n p$ et $d^n q$ repraesentabunt lineolas infinite parvas, ita ut omnia quatuor membra inter se *homogenea* existant. Lineolae tales ordinum altiorum nequeunt quidem ad *oculos* exhiberi, sed casu tamen $n = 2$ conceptum satis clarum de illis habemus. Est enim:

$$d^2x^2 + d^2y^2 = d^2s^2 + d^2u^2 \quad (\text{§. 12, nro. 12.})$$

in qua membra tria priora ad lineas immediate visibiles x, y, s spectant, et imo de membro *quarto* etiam perfecte ratio reddi potest. Est nempe d^2u praecise *sagitta* illa, quae radii osculi continuatione ad *tangentem* usque oritur. (Fig. 8.) Et sic ergo *canon* (nro. 16. vel 18.) ante oculos est *catholicus*, ab $n = 1$ in infinitum usque omnes ordines elementorum x, y et s, φ in se *complectens*, et pythagoricâ lege simul exhibens, quidquid uspiam natura curvarum in recessu habet! — De canone hoc omnes ordines amplectente:

$$d^nx^2 + d^ny^2 = d^np^2 + d^nq^2$$

notandum est, quod casu $n = 1$, fiat $p = s$, $q = 0$, et est nempe $dx^2 + dy^2 = ds^2$. Hoc nempe casu (ob rei simplicitatem) quadratum ultimum d^nq^2 locum non habet. Casu curvae *planae*, nunquam opus est pluribus canonis casibus, quam pro $n = 1$ et $n = 2$. Casus *altiores* canonis autem $n = 3$ et cetera, usum habent in *determinatis* vel *singularibus* curvae punctis, ad quae nempe forte fortuna *evanescat* ordo inferior, ut nempe sit $d^2x^2 + d^2y^2 = 0$. Id vero accidit, si in quodam curvae puncto sit radius osculi $r = \infty$. Nam cum sit: (§. 12. nro. 8.)

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2)}}$$

sponte patet, quod pro $r = \infty$ fiat $d^2x^2 + d^2y^2 = 0$. Et sic per canonem Geometriae sublimioris catholicum:

$$d^nx^2 + d^ny^2 = d^np^2 + d^nq^2$$

non modo *generalia* problemata omnia resolvantur, sed

etiam habitus *determinatorum* quorundam problematum (pro quodam *singulari* nempe puncto) absolute per canonem in *promtu* est. In illo, ut dicam, quod res est, Geometria sublimior quasi omnis continetur et absolvitur. Et Geometriae etiam soror *Mechanica*; ut videbimus. Atque hoc est omnino *culmen* illud, ad quod scientiae, praesertim mathematicae, evehendae sunt; ut nempe scientia, quaquâ patet, ad *unicum* principium unamque formam catholicam revocetur. — Et quemadmodum tota *Mechanica*; sic et geometria *spatii* habet suum canonem:

$$d^n x^2 + d^n y^2 = d^n p^2 + d^n q^2$$

ad quem omnes qualitates, relationes, proprietates circa naturam curvarum et spatii *referuntur*. Quare haud absone canonem nostrum dicemus *Entelechiam pythagoricam*. — Et patet ergo, quam divino instinctu pythagoricum theorema ab tot inde seculis nomine *magistri matheseos* compellarint. —

§. 15.

Postquam de canone (ex ipsis fontibus incrementorum petito) abunde actum, pedem ulterius promovemus; et ad *sequentia* asserta descendimus. — „*Mechanica* et *Geometria*;“ sunt quasi una *eademque* scientia; „utriusque scien„tiae canon est *identicus* inter se. Canon *dynamicus* est „merum corollarium canonis *geometrici*, et utraque scientia „*eidem communi* Entelechiae subest.“ — Lagrangius Mechanicam, dixit quodammodo Geometriam *quatuor dimensionum* esse; nempe *tempus* quasi pro *quarta* dimensione est. Quod quam egregie dictum sit, jam videbimus. — Inchoemus ab entelechiae pythagoricae:

$$d^n x^2 + d^n y^2 = d^n p^2 + d^n q^2$$

ordine primo $n = 1$ id est $dx^2 + dy^2 = ds^2$. Velocitas corporis in elemento ds ponatur $= V$, et ejusdem velocitatis

projectiones ad axes x et y dicantur V', V''. Jam praedictum ordinem primum divide per dt^2, ut fiat:

1.) $\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2}$. Hoc est:

2.) $V'^2 + V''^2 = V^2$.

Ergo hic *primus* ordo involvit *velocitatis* decompositionem seu projectionem ad axes x et y. Progrediamur ad *secundum* entelechiae ordinem $n = 2$. Et hic est ille noster canon:

3.) $d^2x^2 + d^2y^2 = d^2s^2 + d^2u^2$. (§. 12. nro. 12.).

Hic respectu dimensionum dividendus est per dt^4:

4.) $\frac{d^2x^2}{dt^4} + \frac{d^2y^2}{dt^4} = \frac{d^2s^2}{dt^4} + \frac{d^2u^2}{dt^4}$.

Et jam vide, quam pulchre Mechanicae theoria ex entelechia *geometrica* sese quasi *destillet*. — Nimirum si corpus urgeatur a vi P in directione lineae p, tum pro motu hoc existit canon dynamicus $d^2p = Pdt^2$. Jam si haec vis P projiciatur secundum axes x et y, oriuntur vires projectae X et Y, ita ut sit $X^2 + Y^2 = P^2$. Et pro his *projectis* viribus erit:

5.) $d^2x = Xdt^2 \quad d^2y = Ydt^2$.

(Hae vires X et Y constanter *servant* suam directionem, quae est nempe secundum axes x et y respective.) — Jam vero existit *alius* quoque decomponendi modus, nempe in vim tangentialem T et vim normalem N, ut nempe fiat $T^2 + N^2 = P^2$. (In hoc decomponendi genere, vires componentes T et N *mutant* indesinenter directionem suam.) Jam pro tangentiali vi T valet canon $d^2s = Tdt^2$; pro *normali* vi N autem, (cum sagitta $VC = d^2u$ (Fig. 9.) sit praecise effectus is, quem vis normalis producit,) valet canon $d^2u = Ndt^2$. Ergo pro hac altera virium decompositione habetur:

6.) $d^2s = Tdt^2 \quad d^2u = Ndt^2$.

His (5) et (6) jam in istam (4) adhibitis fit:

$X + Y^2 = T^2 + N^2$.

Bonum autem est, has ambas aequationes ordinatim infra se scribere:

$$7.)\ \frac{d^2x^2}{dt^4} + \frac{d^2y^2}{dt^4} = \frac{d^2s^2}{dt^4} + \frac{d^2u^2}{dt^4};$$

$$8.)\ X^2 + Y^2 = T^2 + N^2.$$

Quemadmodum ergo entelechiae geometricae ordo primus $n = 1$ dabat *velocitatis* decompositionem, sic ordo secundus $n = 2$ dat jam decompositionem *virium*; idque ea perfectione, ut entelechia liberam quasi optionem nobis insinuet, utrum in resolvendo aliquo problemate, resolutionem per systema *sinistrum* (8) nempe per X et Y, an per *dextrum* nempe per T et N exhibere praeferamus. Et patet ergo, cuinam scopo geometria categorias istas *utrinque* pythagoricas;

$$d^nx^2 + d^ny^2 = d^np^2 + d^nq^2$$

quasi conscia mente et in usus mechanicos praevie destillet et *praeparet*; nimirum ut resolutiones *ambae* compossibiles uno eodemque actu in promtu sint. Et patet simul, quomodo res habeat cum universo aliquo *systemate*. Nempe si pro massâ M valeant x, y, s, u, pro massa M' autem valeant x', y', s', u', tum erit (vires *motrices* jam adhibendo):

$$\left(\frac{d^2x^2}{dt^4} + \frac{d^2y^2}{dt^4}\right) M = \left(\frac{d^2s^2}{dt^4} + \frac{d^2u^2}{dt^4}\right) M$$

$$\left(\frac{d^2x'^2}{dt^4} + \frac{d^2y'^2}{dt^4}\right) M' = \left(\frac{d^2s'^2}{dt^4} + \frac{d^2u'^2}{dt^4}\right) M'.$$

Quae addendo inter se possunt in *unam* aequationem conjungi. Unde pro toto systemate aliquo intelligetur *sequens* scribendi genus, (jam supra adhibitum):

$$S\left(\frac{d^2x^2}{dt^4} + \frac{d^2y^2}{dt^4}\right) M = S\left(\frac{d^2s^2}{dt^4} + \frac{d^2u^2}{dt^4}\right) M.$$

§. 16.

Sed conducet, rem brevi *exemplo* commentari; et eligamus problema centralium. Probe attende ergo, et inspice praecedentem (7) et (8); Resolvi debeat problema

per systema *sinistrum*, (quod *Lagrangianum* dicam), nempe per X et Y. Aequando (7) et (8) terminos infra se scriptos fit:

1.) $d^2x = Xdt^2$ $d^2y = Ydt^2$.

His ambabus absolvitur jam solutio *Lagrangiana*, per variationum formulam procedens. (§. 7. nro. 12.); actuali resolutioni autem nil immoror. — Exhibenda sit ergo solutio jam ope *dextri* systematis, (quod *Eulerianum* dicam.) Haec dextra solutio enim *pari* tenore cum solutione sinistra incedere debebit. — In *sinistro* systemate, ante omnia ex istis (1) tempus dt eliminandum fuisset. Unde fit:

2.) $Xd^2y - Yd^2x = 0$.

Jam (Fig. 4.) centrum virium sit in Q, et $AQ = p$, item $QF = x$, $FA = y$, et vis in directione p trahens esto $= P$. Erit manifesto:

$$X = \frac{x}{p} P \quad Y = \frac{y}{p} P.$$

Sic ex (2) fit $xd^2y - yd^2x = 0$, ergo:

$$xdy - ydx = Adt.$$

Quae est lex arearum *Keppleri*; ut facile demonstratur. — Et hoc jam praecise ad systema *dextrum* seu *Eulerianum* nunc transferamus. Habetur (§. 15. nro. 7. et 8.):

$$d^2s = Tdt^2 \quad d^2u = Ndt^2.$$

Unde expulso dt fit:

$$Nd^2s - Td^2u = 0.$$

In *hac* igitur jam lex *Keppleri* latere debet. Recordare (§. 12.) quod sit $d^2u = \frac{ds^2}{r}$, ergo $rNd^2s - Tds^2 = 0$. Porro (Fig. 4.) sit $AK = dz$, $AQ = p$, $CK = - dp$, (quia p *decrescit*, motu ab C ad A supposito,) ergo $T = - \frac{dp}{dz} N$, unde fit:

2.) $rdzd^2s + dpds^2 = 0$.

Haec jam per x, y coordinatas exprimenda est. Est autem

$ds^2 = dx^2 + dy^2$, unde etiam d^2s habetur. Porro est $pp = x^2 + y^2$, $dp = \frac{xdx + ydy}{p}$, porro $dz^2 = ds^2 - dp^2$ id est $dz = \frac{ydx - xdy}{p}$. Denique in expressione pro radio osculi (§. 12. nro. 6.) repone pro d^2s valorem suum, unde fiet $r = \frac{ds^3}{dyd^2x - dxd^2y}$. Quibus omnibus in istam (2) subrogatis fit:

$$xd^2y - yd^2x = 0 \text{ id est } xdy - ydx = Adt,$$

ergo lex Keppleri, prorsus ut supra. Solutionem reliquam exhibere, nil attinet. Et sic ergo patet, quod ambae compossibiles ressolutionis methodi (nempe dextra et sinistra) vi pythagorici canonis quasi parallele et juxta se succedant, et problema omne solvitur per *dextram* aeque ac per *sinistram*. Systema *dextrum*, rem ope virium T et N transigit. Et systema sinistrum, (quod viribus X, Y, ad *axes* x, y projectis utitur,) per se spectatum igitur nullam praerogativam habet prae dextro systemate seu antiquo, vires T et N adhibente. In categoria geometrica nempe:

$$d^2x^2 + d^2y^2 = d^2s^2 + d^2u^2$$

utrinque regnat Pythagoras, et utrinque eodem *successu*. Atque si per dt^4 dividatur, (ut nempe transitus fiat ad categoriam *virium*, et fiat nempe:

$$X^2 + Y^2 = T^2 + N^2,$$

tum *dextra* aeque ac sinistra virium biga Pythagoram pro genitore agnoscit. Imo vero si solutio habetur per *sinistrum* systema, habetur simul per *dextrum*, et vice versa, et altera solutio inserviet quasi in confrontationem *alterius*. — Et sic ergo vires optimae et bene meritae T et N, quae praeter jus et fas a Lagrangio antiquatae et oppressae fuerunt, jam ab avo Pythagora in suos honores *restitui* gaudent. Et categoriae virium pythagoricae proprium est, ut uno eodemque actu *ambas* resolvendi species praebeat,

nempe illam *Lagrangii* per vires X et Y, et illam, quam *rudedonavit* Lagrangius, adhibentem vires T et N. Quum sit autem:

$$d^2x^2 + d^2y^2 = d^2s^2 + d^2u^2$$

commemorandus hoc loco est *synonymus* typus (§. 13. nro. 1.):

3.) $d^2x^2 + d^2y^2 = d^2s^2 + ds^2 d\varphi^2$

(ubi nempe $d\varphi$ est angulus curvedinis.) Ergo $d^2u = dsd\varphi$, vel (ob $ds = rd\varphi$, si r sit radius osculi) fit et redit $d^2u = \frac{ds^2}{r}$. Scribatur jam categoria *virium*:

4.) $\frac{d^2x^2}{dt^4} + \frac{d^2y^2}{dt^4} = \frac{d^2s^2}{dt^4} + \frac{ds^2 d\varphi^2}{dt^4}$ id est:

$$X^2 + Y^2 = T^2 + N^2.$$

Sed hoc loco unice systema *dextrum* intendo:

5.) $d^2s^2 + ds^2 d\varphi^2 = T^2 + N^2)\, dt^4$.

Haec ob $ds = Vdt$ et $d^2s = dVdt$ formam induit:

6.) $dV^2 + V^2 d\varphi^2 = (T^2 + N^2)\, dt^2$.

Sed hae (§. 15. nro. 7. et 8.) *sigillatim* sibi aequantur; unde:

7.) $dV = Tdt$ pro vi *tangentiali*.

8.) $Vd\varphi = Ndt$ pro vi *normali*.

In hac ultima scribe $2gN$ pro N, (ut valeat gravitas Galilaeana pro mensura unitatis,) deinde redde $\frac{ds}{r}$ pro $d\varphi$, et jam pro ds scribe Vdt, tum fit:

9.) $N = \frac{VV}{2gr}$.

Quae est vulgaris mensura pro vi normali. — Eulerus et veteres canonem tangentialem $dV = Tdt$ *seorsim* adhibebant, et jam deinde porro canonem (9) pro *normali* in subsidium vocabant; sic verbi causa Haestnerus ex Eulero. At vero categoria virium pythagorica (4) subinde offert istam (6), quae istas (7) et (8) ambas, ad solutionem necessarias, *uno* actu et *simul* ad oculos ponit. — Quoniam autem Lagrangius adeo constanter et unice viribus X et Y *sinistris* inhaeret, inde fit ut in solutionibus Lagrangianis

vires T et N prorsus *non* in conspectum prodeant; quarum notitia tamen saepe *necessaria* et imo *essentialis* est. Vires X et Y enim quodammodo *accidentales* existunt, quoniam axium x et y, ad quos istae vires projiciuntur, positio pro *lubitu* assumi potest. At contra vires T et N ab axium positione sunt *independentes*, et nempe non per hos *axes* determinantur, sed per curvam *ipsum*. Et vides ergo quam sapienti consilio ex entelechia pythagorica se *utrumque* resolvendi systema destillet, ut nempe non modo vires projectione *fortuitas* X et Y, sed et simul reales et *non* fortuitas T et N uno eodemque actu *pernoscamus*. Vir incomparabilis ergo, Maclaurini axibus x, y, z, (viribusque X, Y, Z in istos axes projectis) *exclusive* et *nimis* indulget, et utilissimas realesque vires T et N omnino pessumdat et *jugulat*. — Ceterum per se patet, formam $X^2 + Y^2 = T^2 + N^2$ *non* esse id, quod in hac re novum est. Sed cum *sagittam* d^2u expresse adhiberem, et in categoriam bis pythagoricam adaptarem:

$$d^2x^2 + d^2y^2_t = d^2s^2_t + d^2u^2,$$

ideo factum est, ut illa duplex et compossibilis Mechanicae theoria jam ante oculos esset:

$$\frac{d^2x^2}{dt^4} + \frac{d^2y^2}{dt^4} = \frac{d^2s^2}{dt^4} + \frac{d^2u^2}{dt^4}$$

$$X^2 + Y^2 = T^2 + N^2$$

siquidem sagitta d^2u praecise viam a vi *normali* oriundam designat. Et sic ergo categoria generalis pythagorica:

1.) $d^nx^2 + d^ny^2 = d^np^2 + d^nq^2$

characterem *cosmologicum* induit, et per casum $n = 1$ et $n = 2$ sane Mechanicam omnem omnesque coeli motus explicare *destinatur*. Entelechiam (1) autem sine dubio primus ego ceteris mortalibus propinavi. Quae quemadmodum *Geometriae* sublimioris elementa omnia continet, et problemata proprietatesque ejus omnes in sinu fovet, sic per *tempus* seu quartam dimensionem divisa, totam porro

Mechanicam in sinu fovet. Nec in geometria aliquid simile huic (f) in medium afferas, quippe quae formula una et sola Spatio Motuique suas aeternas *leges* praescribit. Quoniam autem in geometricis semper $ds =$ const. poni potest, ergo praeferendum est illud *alterum* scribendi genus: (§. 14. K et nro. 7.)

2.) $d^nx^2 + d^ny^2 = [(F'\phi)^2 + (F''\phi)^2]\, ds^2,$

siquidem haec per merum obtutum docet, ex quibusnam elementis conflata sit *sinista* pars, et ex quibus *dextra*. In *sinistrâ* versantur unice *rectilinea* elementa dx, dy, in *dextra* autem versantur mere *curvilinea* elementa vel curvedinem *generantia* ds, $d\phi$. Hic est enim praecise *Character* canonis. Ad *sinistram* elementa versantur, quae sunt *extra* curvam, ad *dextram* autem versantur elementa curvae *ipsi* inhaerentia sive *domestica*. — Et haec jam ad apotheosin canonis pythagorici sufficiant. Pro cujus parte dextra quum terminum generalem rimarer, vidi aliquid, quod pro tempore supprimere cogor. — Ceterum cum haec ita sint, omnino Mechanica definiri potest, quod sit *ars* bene utendi theoremate *pythagorico*. —

In superioribus oblitus fui, expressionem pro vi normali *synonymam* exhibere. Erat (§. 16. nro. 8.) illius canon $Vd\phi = Ndt$. Sit velocitas angularis, (qua nempe angulus $d\phi$ ad centrum osculi describitur,) $= \Pi$. Ergo patet esse $\Pi = \frac{d\phi}{dt}$. Sic praedictus canon fit $N = \Pi . V$, id est, vis normalis est productum velocitatis *angularis* et *verae*. Vel adhibendo mensuram Galilaeanam fit $2gN = \Pi V$. Reposito autem in hac valore $\Pi = \frac{V}{r}$, (ubi r est radius osculi,) redit illa vulgaris expressio $N = \frac{VV}{2gr}$.

§. 18.

Egregia res occurrit. — Intuere pythagoricum canonem:

1.) $d^n x^2 + d^n y^2 = d^n p^2 + d^n q^2$.

Quod in *dextra* cernitur, per functiones quantitatum s et ϕ exhibetur, ut vidimus. In *sinistra* sunt merae x et y. At vero curvae non tantum per coordinatas x, y exhibentur, sed et per aequationes *polares*, nempe per angulum et radium vectorem. — Sit (Fig. 4.) $AQ = p$ (Quamvis enim haec litera in *praecedente* (1) jam significatum suum habet, ille tamen significatus mere *ontologicus* est, ut ita dicam; nec ergo confusio oritur.) — Sit $QF = x$, $FA = y$, ergo (si $AQF = \theta$):

2.) $x = p \cos\theta \quad y = p \sin\theta$.

Quia autem istius (1) casum unicum $n = 2$ opus habeo, ille canon ergo ita sonabit:

3.) $d^2x^2 + d^2y^2 = d^2s^2 + d\phi^2 ds^6$ (§. 13. nro. 1.).

In hujus parte sinistra substitue ex (2) valores d^2x, d^2y, et cum admiratione videbis, haec duo (3) sinistra quadrata *denuo* in quadrata pythagorica se accommodare, et nempe prodit:

4.) $d^2x^2 + d^2y^2 = (d^2p - pd\theta^2)^2 + (pd^2\theta + 2\,dpd\theta)^2$.

Vides ergo, quam late regnet *Pythagoras!* — In dextra parte nempe, (quae *polares* jam functiones continet,) Pythagoraeismum *novum* organisare se vides, e *sinistra* parte novo et *permixto* modo se *destillantem*. Nam toto *coelo* non est sigillatim:

$$d^2x = d^2p - pd\theta^2 \text{ et } d^2y = pd^2\theta + 2\,dpd\theta.$$

Et similiter jam porro *sequentem* casum $d^3x^2 + d^3y^2$ per istas (2) transformabis, effectu prorsus *eodem pythagorico!* Et *generaliter* loquendo, si $d^nx^2 + d^ny^2$ ope istarum (2) transformetur, denuo prodeunt quadrata *pythagorica*, et prodit nempe forma:

$$d^nx^2 + d^ny^2 = [F'(p,\theta)]^2 + [F''(p,\theta)]^2.$$

(Operae pretium enim non duco, ad generalem demonstra-

tionem relabi.) — Loco istius (3) scribamus jam entelechiam *virium:*

$$\frac{d^2x^2}{dt^4} + \frac{d^2y^2}{dt^4} = \frac{d^2s^2}{dt^4} + \frac{d\phi^2 ds^2}{dt^4}.$$

Heic in dextrâ cernuntur elementa ds, $d\phi$, curvae *immediate* inhaerentia. Ad *sinistram* autem sunt elementa quasi *fortuita* dx, dy, siquidem curvas aeque per *polares* aliasve functiones quam per orthegonales x et y exhibemus. Et ex dictis ergo jam patet, quod quacunque demum (loco x et y) *alia* ratione naturam curvae exhibeas, *indesinenter* et indefesse prodeat categoria semper *pythagorica.* Ceterum functiones polares (4) ad dextram sunt praecise eae, quas in problemate centralium Eulerus, Dalembertus, Lagrange, Cousin... quisque sua methodo exhibuerunt. Nos autem ista nil porro moramur; nam totam ex his Mechanicam actu derivare ut fas est, et exhibere compossibilem istam resolutionem duplicem, id integri *voluminis* foret. — Quum ante omnia prodeat *Keppleri* arearum lex $xdy - ydx = Adt$, transforma hanc ope istarum (2), fietque $ppd\theta = Adt$. Hujus differentiale est $pd^2\theta + 2dpd\theta = 0$. Sic ergo istius (4) membrum quartum seu ultimum evadit $= 0$. Terminus *tertius* autem $d^2p - pd\theta^2$ membris *duobus* constat. Membrum d^2p exprimit attractionem *centralem;* et membrum $pd\theta^2$ autem designat praecise diminutionem, quae a vi *normali* oritur. Sic formulae catholicae consentiunt cum solutione mea superiori (§. 10.). — Ceterum sane *sciebat* quidem Lagrangius, terminos d^2x et d^2y ope istarum (2) posse angulariter transformari; at vero has transformatas prodire semper *pythagoricas*, et in duo nempe *quadrata* dispesci, idque pro omni *cogitabili* Mechanicae problemate, et pro singulo *corpore* systematis, id sane nesciebat, nec nisi auspicante Pythagora divinare potuisset.

§. 19.

Non possum sub finem, quin Lectori adhuc illustre quoddam Panorama pythagoricae scientiae hujus ante oculos

ponam, et categoriam pythagoricam $d^n x^2 + d^n y^2$ jam tandem sub optata forma exhibeam. — Sit (Fig. 4.) $QF = x$, $FA = y$. Docetur in quovis bono compendio, (et facile patet,) anguli MAF differentiale esse angulum *curvedinis*. Qui si sit $= d\varphi$, erit ergo ille prior angulus $= \varphi$. (Vel rectius $= \varphi + \alpha$. Sed constans α nihil ad praesens negotium confert.) — Fit ergo:

1.) $dx = ds \sin\varphi \quad dy = ds \cos\varphi$.

Sumto ergo $ds =$ const. prodit simplicissime:

2.) $d^n x = ds d^{n-1} \sin\varphi \quad d^n y = ds d^{n-1} \cos\varphi$.

Unde pro categoria generali pythagorica fit:

3.) $d^n x^2 + d^n y^2 = [(d^{n-1} \sin\varphi)^2 + (d^{n-1} \cos\varphi)^2]\, ds^2$.

Cui ab $n = n = 1$ in infinitum valiturae, in geometria analytica nusquam similem reperias. Pro $n = 1$ fit:

$$dx^2 + dy^2 = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\, ds^2 = ds^2.$$

Post hunc primitivum casum pythagoricum videbis jam, quomodo functiones scalae (K §. 14.) ex ista mirabili (3) in conspectum prodeant! Pro qua (3) scribi potest, si lubet:

$$\frac{d^n x^2 + d^n y^2}{dx^2 + dy^2} = (d^{n-1} \sin\varphi)^2 + (d^{n-1} \cos\varphi)^2.$$

Pone nunc $n = 2$, et ex (3) fit $d^2x^2 + d^2y^2 = d\varphi^2 ds^2$. Pone porro $n = 3$, et fiet $d^3x^2 + d^3y^2 =$

$[(d^2\varphi \cos\varphi - d\varphi^2 \sin\varphi)^2 + (d^2\varphi \sin\varphi + d\varphi^2 \cos\varphi)^2]\, ds^2$. Vel:

$$d^3x^2 + d^2y^2 = d^2\varphi^2 + d\varphi^4.$$

Pone $n = 4$, et fiet $d^4x^2 + d^4y^2 =$ (M)

$$[(d^3\varphi \cos\varphi - 3\, d\varphi d^2\varphi \sin\varphi - d\varphi^3 \cos\varphi)^2 +$$
$$(d^3\varphi \sin\varphi + 3\, d\varphi d^2\varphi \cos\varphi - d\varphi^3 \sin\varphi)^2]\, ds^2.$$

Vel actualiter: (N.)

$$d^4x^2 + d^4y^2 = [(d^3\varphi - d\varphi^3)^2 + (3\, d\varphi d^2\varphi)^2]\, ds^2$$

Et sic ergo jam scalae (K) veros *natales* habes! — At cave, ne justum rei conceptum dimittas. — Loco istius (3) scribam breviter:

4.) $d^n x^2 + d^n y^2 = (AA + BB)\, ds^2$.

Hanc dico categoriam *immediatam* Pythagorae; et est nem-

pe

pe $A = d^{n-1}\sin\phi$ et $B = d^{n-1}\cos\phi$. Haec differentialia actualiter explicando et quadrata deinde addendo, ut subinde feci, termini finiti $\sin\phi$ et $\cos\phi$ *sponte* ex calculo abeunt, ut vidimus, et (quod *Caput* rei est,) functio sic emergens *denuo* se in quadrata pythagorica a prioribus *diversa* se componit. Rem tibi *exemplo* manifestam fac. In ista (3) fiat $n = 4$, id est:

5.) $d^4x^2 + d^4y^2 = [(d^3\sin\phi)^2 + (d^3\cos\phi)^2]\, ds^2$; id est:

6.) $d^4x^2 + d^4y^2 = (AA + BB)\, ds^2$.

Quae est ergo categoria *immediata*. In hac jam differentialia *A* et *B actualiter* exhibe, et prodibit, (ut subinde vidimus,) ista (N) aequatio seu categoria *derivata*:

7.) $d^4x^2 + d^4y^2 = [(d^3\phi - d\phi^3)^2 + (3\, d\phi d^2\phi)^2]\, ds^2$, vel.

8.) $d^4x^2 + d^4y^2 = (PP + QQ)\, ds^2$.

Et sic vides ergo, categoriam *primitivam* pythagoricam (6) abire in *derivatam* pythagoricam (8), a primitivâ penitus *diversam*, et fit:

9.) $AA + BB = PP + QQ$

(in qua nempe toto *coelo* non est $A = P$ et $B = Q$.) — Similem jam transformationem (9) intellige pro $n = 5$, et porro; unde patet virtus Pythagorae! Et haec *derivata* categoria:

10.) $d^nx^2 + d^ny^2 = (PP + QQ)\, ds^2$

est ea, cujus existentiam *supra* (§. 14,) demonstratam dedi. Primitiva enim (3) vel (4) per se patet. — Sponte patet etiam, quod pro *ds non* constanti, res *eodem* prorsus modo transigatur. Si nempe sit productum $F = up$, differentialia d^nF procedunt per coefficientes Binomii, et est nempe $dF = udp + pdu$, $d^2F = ud^2p + 2\, dudp + pd^2u$. Et porro. Ergo ex istis (1) differentiando fit:

11.) $d^nx = d^ns\sin\phi + nd^{n-1}sd\sin\phi + \frac{n(n-1)}{2}\, d^{n-2}sd^2\sin\phi + ..$

12.) $d^ny = d^ns\cos\phi + nd^{n-1}sd\cos\phi + \frac{n(n-1)}{2}\, d^{n-2}sd^2\cos\phi + ..$

Vel breviter $d^n x = A$, $d^n y = B$, unde habetur:

$$d^n x^2 + d^n y^2 = AA + BB.$$

Et hanc jam (differentialia sinuum et cosinuum nempe actualiter exhibendo, ut hactenus factum est,) transformabis in categoriam pythagoricam *derivatam* seu *secundam*:

$$d^n x^2 + d^n y^2 = PP + QQ.$$

Sic prodire videbis illas categorias *completas*, (quae nempe differentiale *nullum* constans involvunt,) quas completas exhibui pythagorice supra (§. 14. nro. 14. et 15.) — In *Mechanica* opus est *completis*; nam ibi *non* ds pro constanti est, verum dt. Quare si praesentem §phum traducere ad Mechanicam velis, tum necesse est, praecedentes *completas* (11) et (12) adhibere, quae nempe terminum $d^2 s$ et altiores *possident* adhuc. Hoc supposito sit velocitas vera $= V$, et velocitates secundum axes x, y sint V', V'', respective. Sic fit $ds = V dt$, $dx = V' dt$, $dy = V'' dt$. Ergo loco istarum (1) habetur $V' = V \sin\varphi$ et $V'' = V \cos\varphi$, ideoque in ista (3), (*complete* nempe intellecta) sinum et cosinum ejicies. — At vero hic subsistere cogor in media scripti hujus materia, quae pro pythagorico quasi Almagesto est. —

Recapitulatio. — In curva occurrunt elementa duo *realia*, et *immediate* nempe illi inhaerentia s et φ, nempe *arcus* et angulus *curvedinis*. Deinde curvae *aequatio* exhibetur vel per *coordinatas* x, y, vel *polariter* per angulum aliquem θ et vectorem p. Vel etiam per quemvis *alium* pro lubitu modum. Et quoniam ergo curvae aequatio p exhiberi pro lubitu per has vel *illas* quantitates potest, eam *ipsam* ob causam istas x, y vel p, θ appellavi *fortuitas*. — „Inter istas *Reales* jam et inter has *Fortuitas*, existit generalis *relatio algebraica*, et quidem relatio *utrinque* praecise *Pythagorica*. Et quidem si aequatio curvae per *coordinatas* x, y exhibetur, erit (sumto ds = const.):

1.) $d^n x^2 + d^n y^2 = [(F'\varphi)^2 + (F''\varphi)^2]\, ds^2$.

At si aequatio curvae *polariter* per p, θ exhibetur, erit:

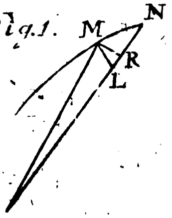
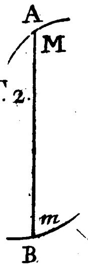
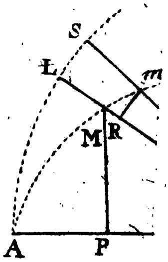
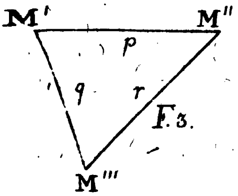


Fig. 1.

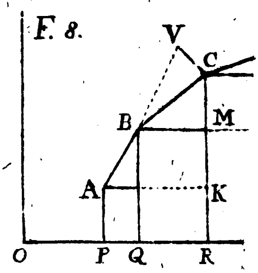


F. 2.

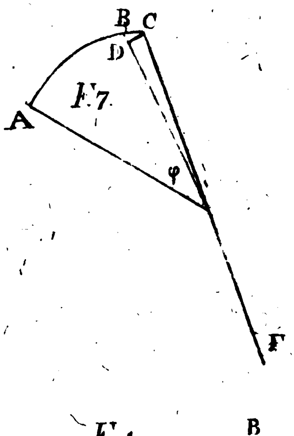




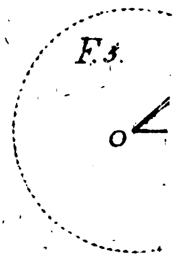
F. 3.



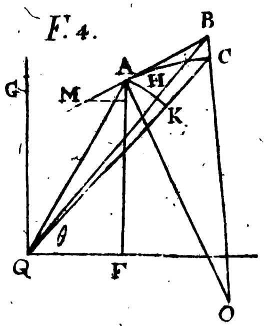
F. 8.



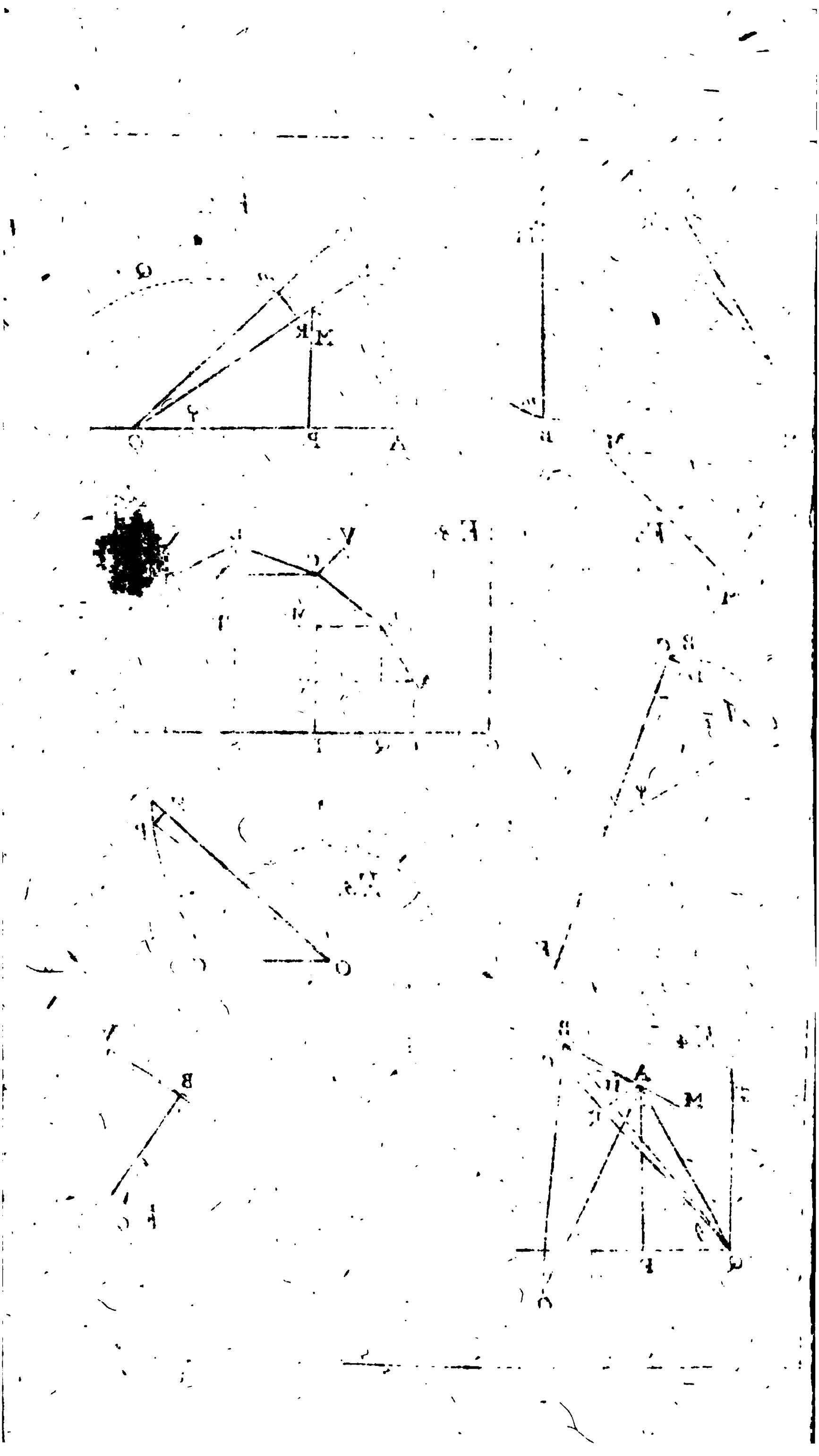
F. 7.



F. 5.



F. 4.



2.) $[\Phi'(p,\theta)]^2 + [\Phi''(p,\theta)]^2 = [(F'\varphi)^2 + (F''\varphi)^2]\, ds^2$.

Et hae entelechiae pythagoricae complectuntur, (quod sane stupendum est,) *infinitas* entelechias, nempe pro $n = 1$, $n = 2$ et sic deinceps. — Per entelechiae casum $n = 1$ determinantur *tangentes* et problemata a tangentibus *pendentia*; per casum $n = 2$ autem determinantur *osculorum* radii et problemata ab his *radiis* pendentia. Quibus ambobus elementis, geometriam sublimiorem totam *contineri* scimus. — (Quid autem *altiores* casus $n = 3$, $n = 4$ et porro designent et ad quid famulent, id *supra* monuimus. Horum altiorum theoria plene heic explicari brevitatis causa non potuit.) Et sic ergo per hanc universalem entelechiam pythagoricam, ad geometriae sublimioris ultimos *fines* perventum. Quae hactenus erat *Scientia*, nunc *Formula* est; ab $n = 1$ in infinitum, quantitatum realium et fortuitarum nexum seu relationem pythagorice *complectens*. — Quid autem *designent* istae reales functiones, (verbi causa istae nro. 1. ad dextram,) id ex mirabili rei fundamento *demonstravi*. Erat enim primitive:

$$d^n x^2 + d^n y^2 = [(d^{n-1} \sin\varphi)^2 + (d^{n-1} \cos\varphi)^2]\, ds^2$$

quam scripsi breviter:

$$d^n x^2 + d^n y^2 = (AA + BB)\, ds^2.$$

In hac jam si differentialia A et B actualiter explicentur, tum haec ambo quadrata pythagorica se *denuo* in quadrata *nova* pythagorica componunt $= PP + QQ$, quae sunt jam quadrata ipsissima ista nro. 1. ad *dextram*, nempe $(F'\varphi)^2 + (F''\varphi)^2$. — Nam hic *secundus* Pythagoraeismus $= PP + QQ$, erat praecise illud magnum nostrum *inventum*. Et hic *secundus* quoque, locum habet ab $n = 1$ usque in *infinitum*. — Quod autem, divisione per dt factâ, omnis quoque *Mechanica* in entelechiâ nostrâ contineatur, de eo nunc tacere praestat, quam pro rei majestate parum dicere. — Lagrangii generalii formula dederat solas resolutiones per vires X, Y; at entelechia mechanica nostra dat simul et eodem